位相幾何学入門 第１回
集合とそこから広がる世界

山 本 修 身

名城大学理工学部情報工学科

この講義の基本事項

- **講義名** 幾何学入門
- **担当者** 山本修身
- **メールアドレス** `osami@meijo-u.ac.jp`
- **開講日時** 秋学期 Q3 水曜日 1，２時限 9:20-10:50 11:10-12:40
- **参考書** 山本修身：よくわかるトポロジー．森北出版，2015.
- **成績** 期末試験 80%, 授業中の確認テスト 20%
- **出席** 成績には一切加味しない

この講義に関する注意

- 出席は成績に加味しませんが，たまにチェックすることがあります．成績には関係ありませんが，出席状況が悪い場合，期末試験の受験資格 に抵触する場合があります．

- 欠席した場合に，届け出る必要はありません．授業内容について 資料などを参考にしてしっかりと復習しておいてください．

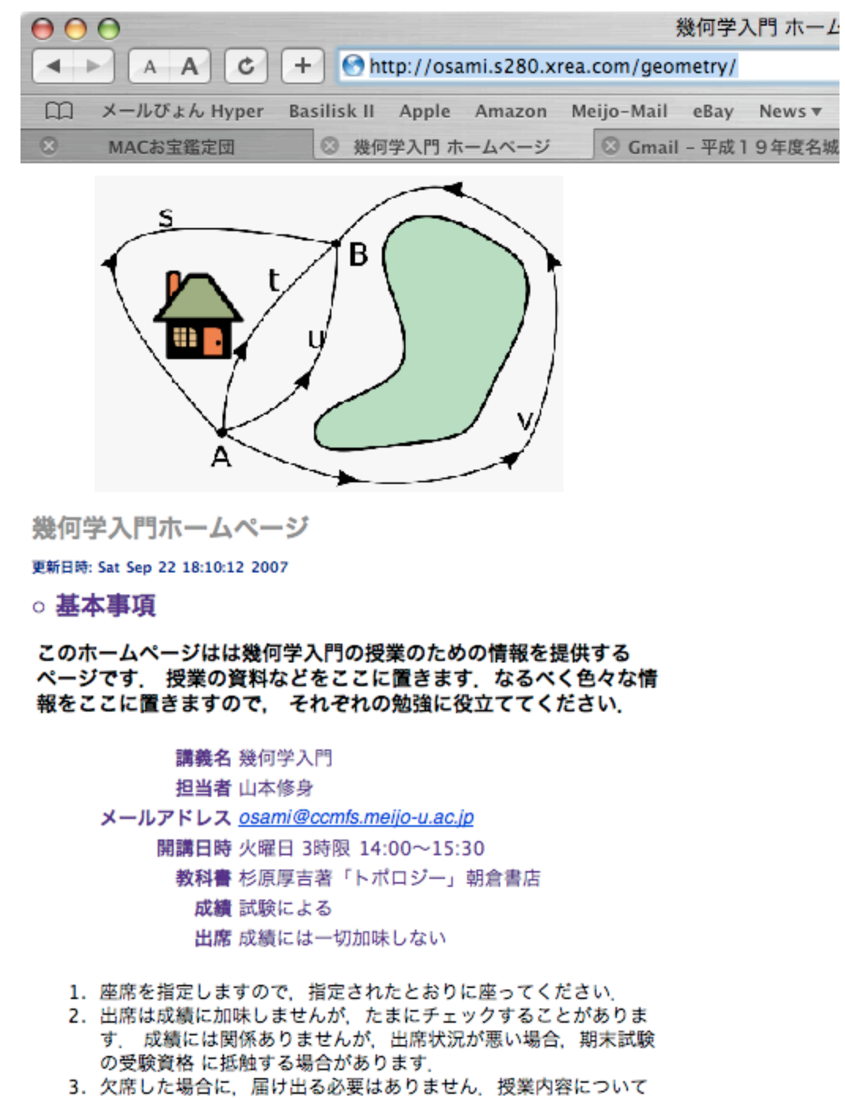
- 連続する2つの講義のうち後半で確認のための小テストを行います．

この講義のホームページ

http://osami.s280.xrea.com/geometry/

このページに置かれるもの

- 注意事項
- 授業資料
- 授業プロジェクタ原稿
- その他の資料



幾何学のイメージ

解析学（微積分を含む）

空間の性質を明らかにする

幾何学

- 微分幾何
- 位相幾何
- 代数幾何

代数学（線形代数を含む）

JABEEにおけるこの講義の位置づけ

- 73309-001 位相幾何学入門　　　小項目：C-3
- (C) 数学及び自然科学に関する知識を習得し, それらを応用できる
- C-3: 離散数学（離散数学を情報技術に応用するための基本を理解している）

本日の講義

集合とそこから広がる世界

集合 (set) とは

- 「集合とはものの集まりのことである．」において「もの」とは何か？
- 集合にある要素が所属しているかいないかがはっきりとわかるもの.
- 同じ要素がある集合に「2度含まれる」というようなことはない.
- 数学の多くの概念が集合を用いて定義される.

$x \in X$	$x \notin X$
xがXに含まれる	xがXに含まれない

集合の表現方法

- 要素を列挙する方法

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}$$

表現できないことがあるが具体的である

- 要素の条件を記述する方法

柔軟であるが，実体が何なのかわかりづらい

$$T = \{x \mid x \text{ は実数 かつ } 1 \leq x \leq 2\}$$

Russelのパラドックス

すべての集合を以下のRとRの補集合R^{c}に分類する：

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

$$R^c = \{x \mid x \in x\}$$

このとき，R ∈ R と仮定すると定義より R ∉ R.

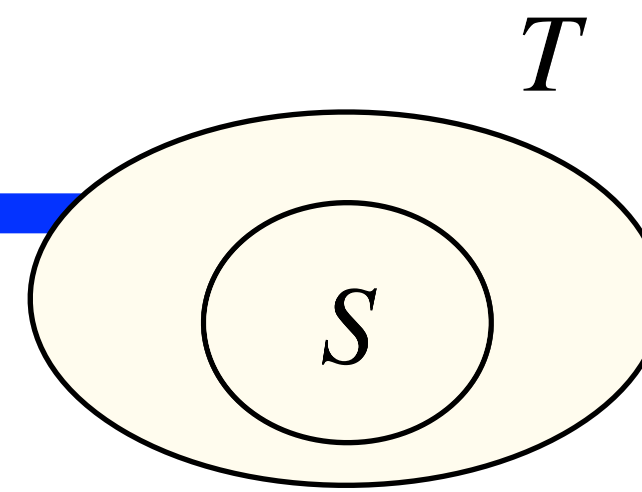
逆に， R ∉ R と仮定する R ∈ R^c となり定義より R ∈ R.

どちらにしても矛盾となる.

Bertrand Russel (1902)

集合の記号を無制限に利用すると矛盾が生じる

集合の関係と演算

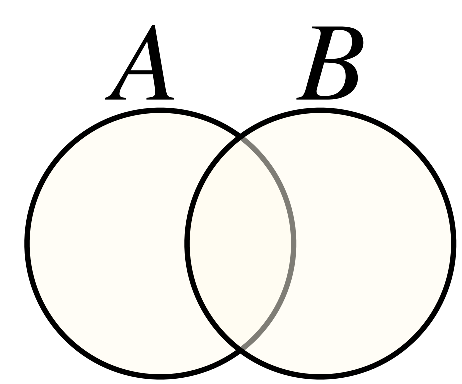


- 包含関係 $S \subset T$

$$x \in S \text{ ならば } x \in T$$

- 和集合，共通部分，差集合

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \end{aligned}$$



順序対と直積

- 順序対とは2つの要素を「ペア」にしたもの (x, y)
- 順序が意味をもつ.
- 三組 (x, y, z) は $(x, (y, z))$ と定義できる.
- 直積とは２つの集合からそれぞれ要素をとってきて,
それを順序対にしたものの集合

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

- n次元ユークリッド空間は直積の例である

全体集合，空集合，補集合

- 現在考えている「全体」(universe) を表す集合Uを全体集合と呼ぶ．この集合は状況によって色々に変化する.
- UからUの部分集合Xを引いた集合を補集合と呼びX^{c}と書く (complement).
- 要素を１つも含まない集合を空集合という. これをϕと書く (empty set).

ベキ集合

ある集合Xの部分集合をすべて集めた集合をXのベキ集合 (power set)といい，$\mathcal{P}(X)$と書く.

$$\mathcal{P}(X) \to 2^X$$

$$\mathcal{P}(X) = \{Y | Y \subset X\}$$

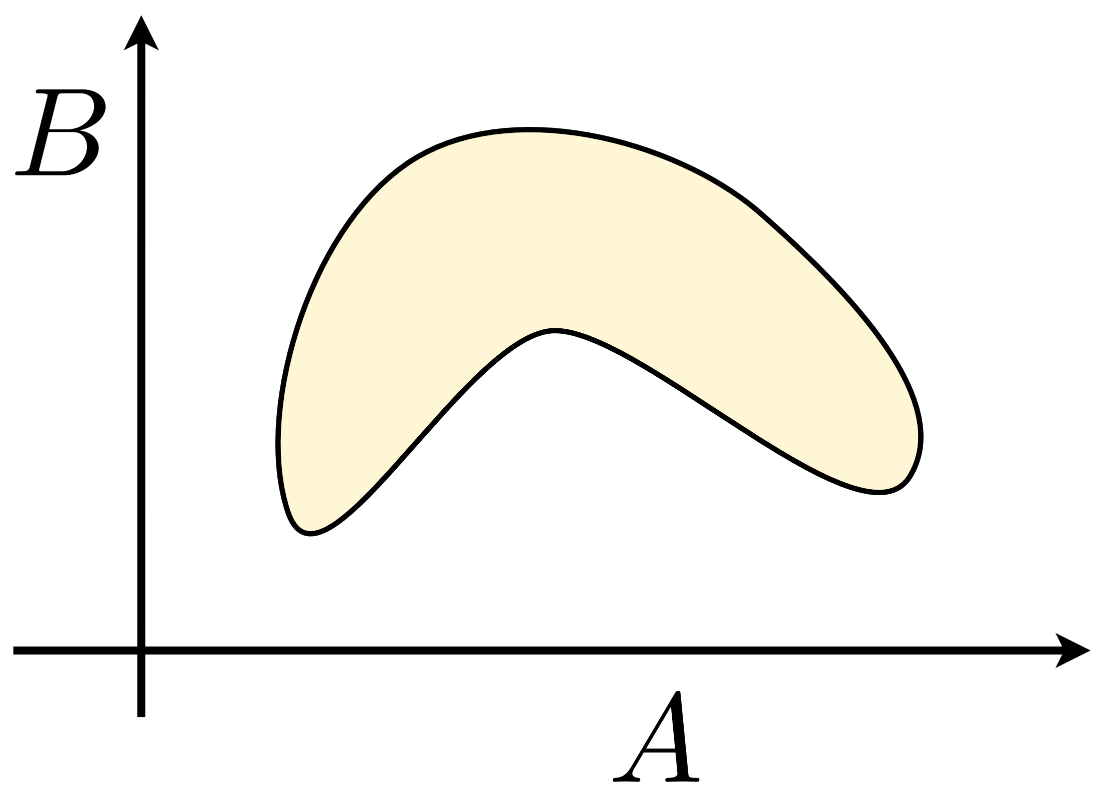
$$\emptyset \in \mathcal{P}(X)$$

$$X \in \mathcal{P}(X)$$

関係とは

- 集合AとBの間の関係 (relation) とはA×Bの部分集合Rのことである.

$$R \subset A \times B$$



$$(a, b) \in R$$

$$\Updownarrow$$

$$aRb$$

特殊な関係1： 順序関係

- 順序関係はいわゆる不等号による関係である

1. aRb かつ bRa ならば $a = b$ である.
2. aRb かつ bRc ならば aRc である.
3. すべての要素 a について aRa である.

特殊な関係2： 同値関係 重要

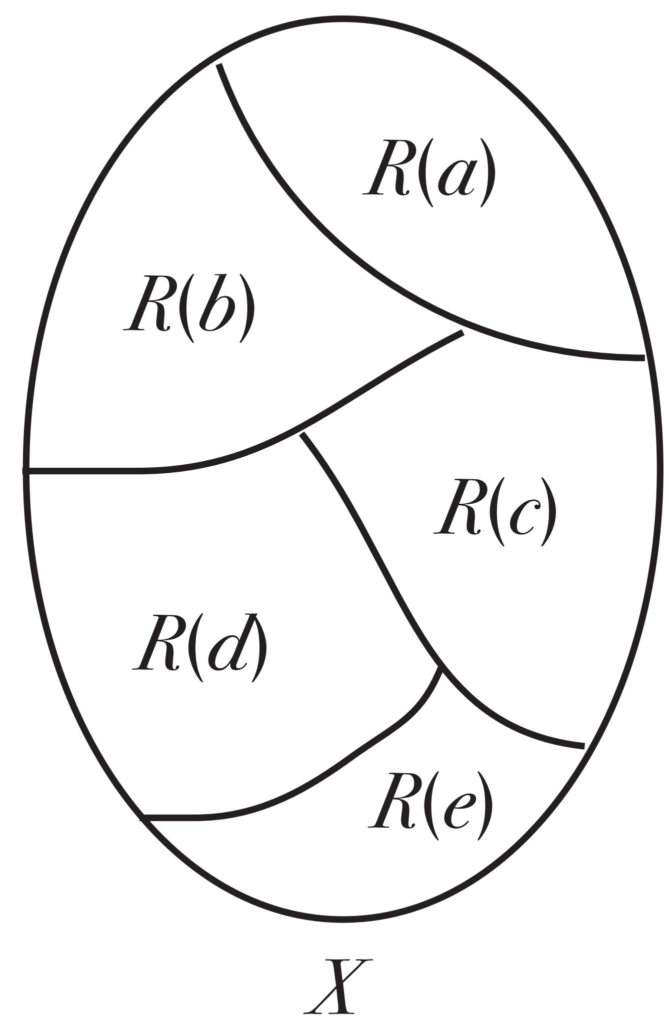
- 同値関係はいわゆる「等号」による関係である．等しさは伝搬する（ルール２）

1. すべての要素について aRa である．
2. aRb かつ bRc ならば aRc である．
3. aRb ならば bRa である．

同値関係から得られる同値類

- ある集合X上に同値関係が定義されると，それを基にして同値類を定義することができる

$$R(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$$



Xのすべての元はいずれか一つの同値類に属する

$$X/\sim = \{R(a), R(b), \cdots\}$$

同値類の例

例　２つの整数 a, b の間の関係として，

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ が } 2 \text{ で割り切れる} \tag{1.12}$$

を定義すると $\sim$ は同値関係となります．整数の集合をこの同値関係で同値類を作ると以下の２つの類に分類することができます：

$$R_1 = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\} \tag{1.13}$$

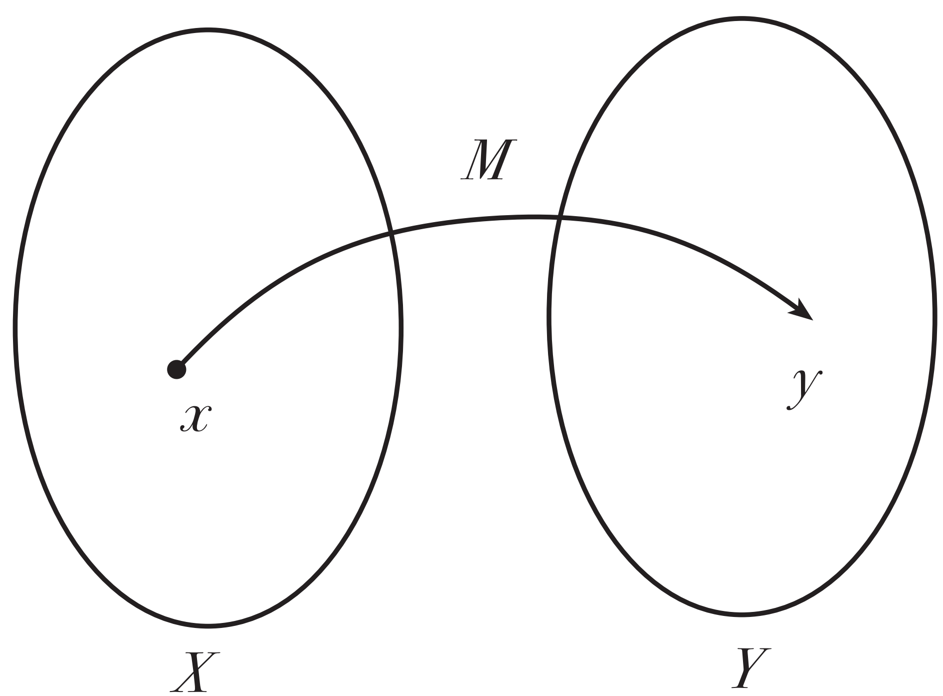
$$R_2 = \{\pm 1, \pm 3, \ldots\} \tag{1.14}$$

我々は，最初の類を習慣的に「偶数」と呼び，後者を「奇数」と呼んでいます．

写像という関係

- 写像とは１つの集合X, Yの関係で以下の性質の成り立つもの

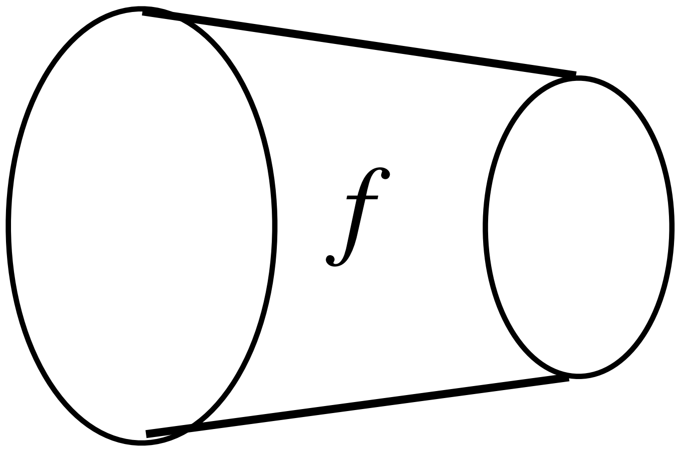
任意の $x \in X$ について xMy となる $y \in Y$ は唯一存在する.



特殊な写像

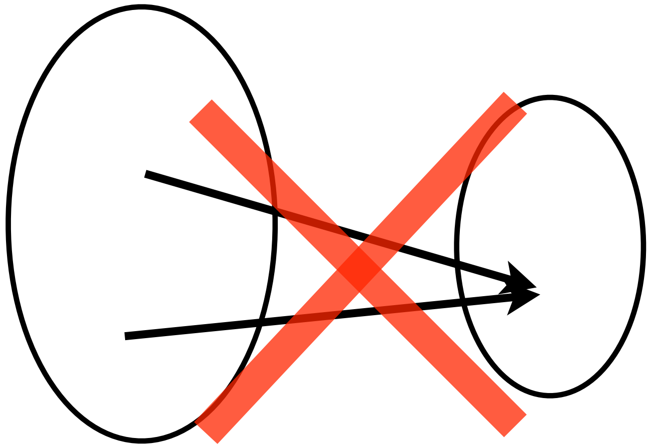
- 写像が**全射**であるとは，任意のYの要素について，その要素に写像されるXの要素が存在すること

surjective



- 写像が**単射**であるとは，Yのある要素に写像するXの要素が唯一であることをいう．

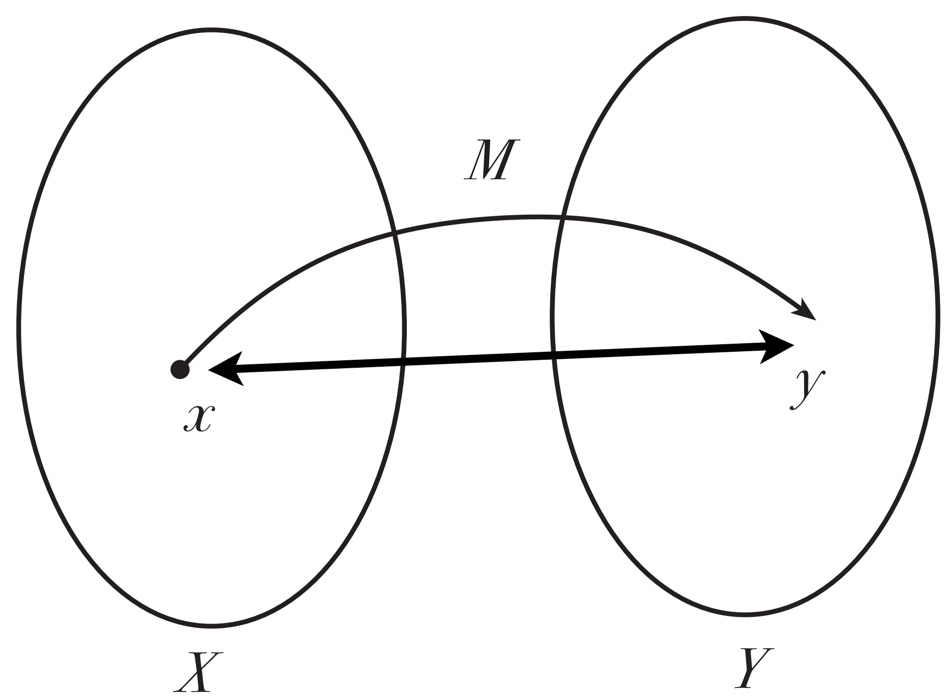
injective



全単射：１対１の写像

- 全射であり，単射である写像のことを**全単射**と呼ぶ．全単射な写像は要素を１対１に写像する．

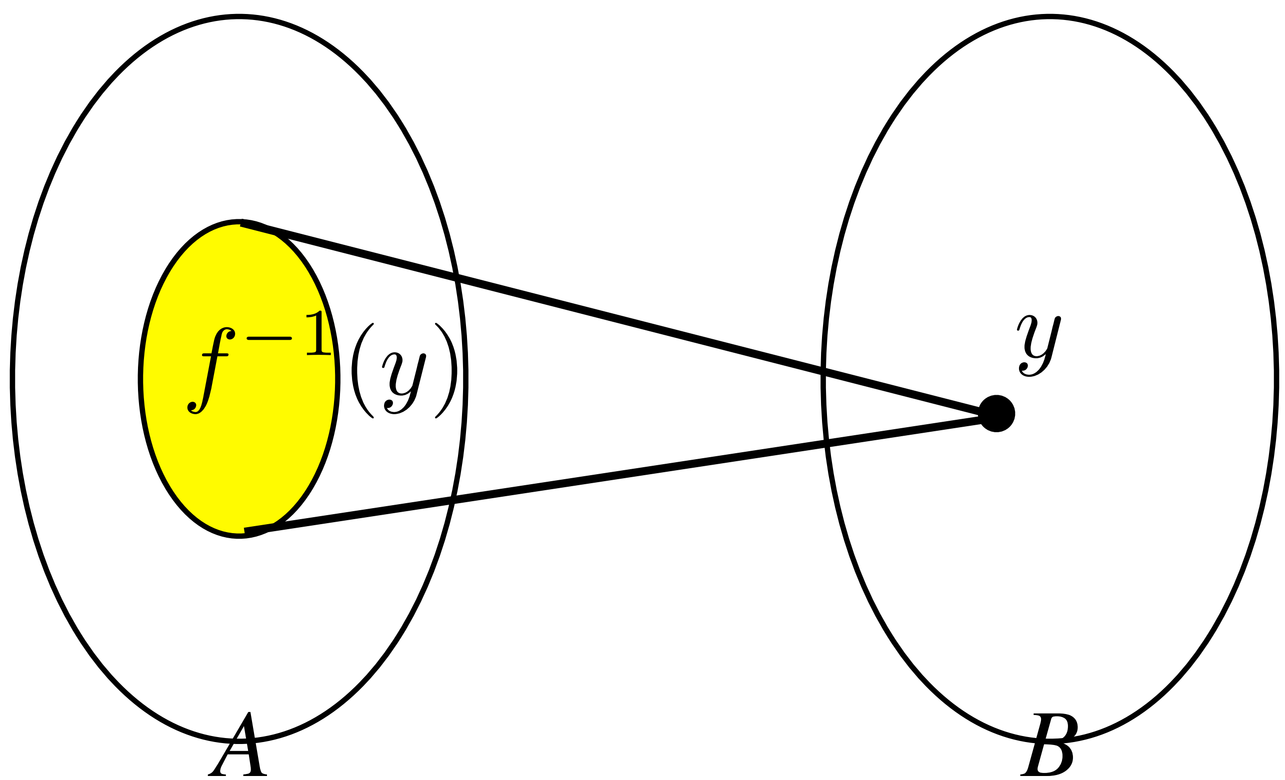
bijective



原像とは（1）

- 原像とは，与えられた元に写像する要素の集合である.

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

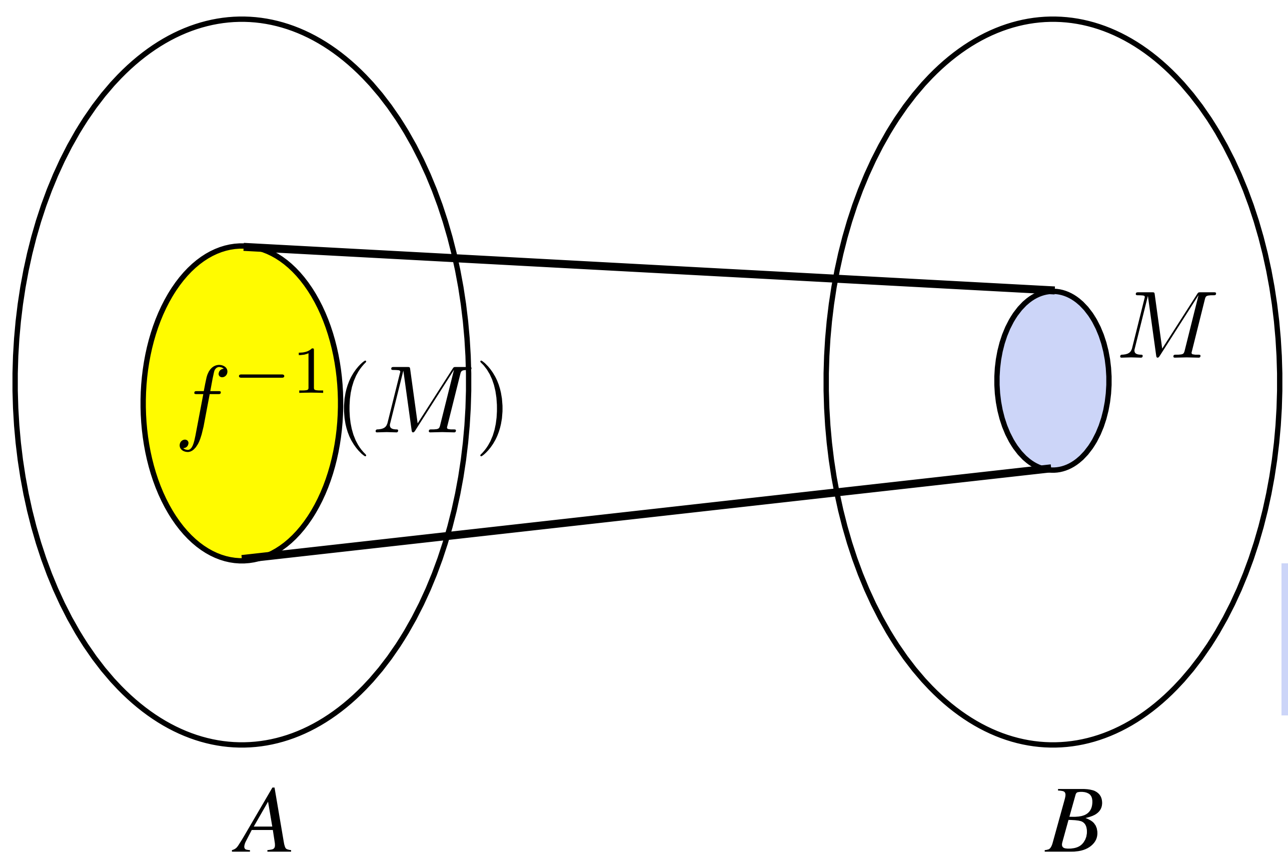


要素の原像

原像とは（2）

- 集合の原像を定義することもできる.

$$f^{-1}(M) = \{x \in X \mid f(x) \in M\}$$



集合の原像

写像の例

例　実数の集合から実数の集合への関数 $y = f(x) = x^2$ は単射ではない．なぜならば，$f(1) = f(-1) = 1$ となり，異なる x が同一の関数値を持つ．またこの関数は全射でもない．なぜならば，$f(x) = -1$ となる x が存在しない．これに対して，$y = g(x) = x^3$ は単射である．y が与えられたとき $g(x) = y$ を満たす x は唯一である．また，任意の y について $g(x) = y$ となる x が存在する．さらに，$f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ であり，$g^{-1}(2) = \sqrt[3]{2}$ となる．

もし，関数 f を 0 以上の実数から 0 以上の実数への写像であると定義すれば，f は全単射となりますし，0 以上の実数から実数への写像であると定義すれば，単射となります．このように全射や単射であるということは写像がどのような集合の上に定義されているかということに依存します．

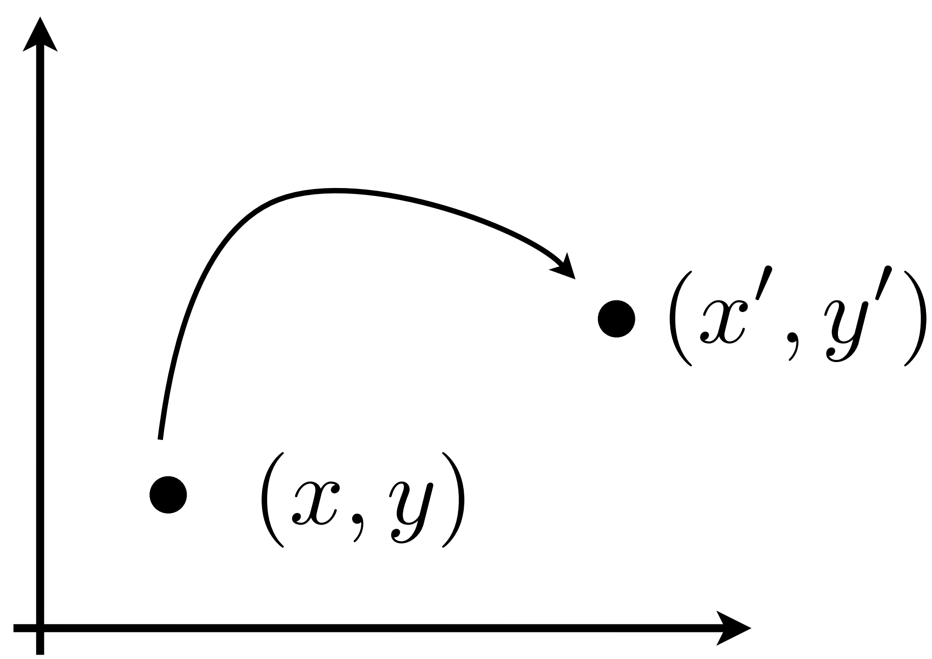
変換とは

- 変換とは，ある集合Aから同じ集合への写像のことをいう．2次元ユークリッド空間から2次元ユークリッド空間への写像は変換である．たとえば，行列を用いることによって線形な変換を表現することができる．

ユークリッド空間上の１次変換

- 正方行列はユークリッド空間中のある変換を表す（一次変換）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



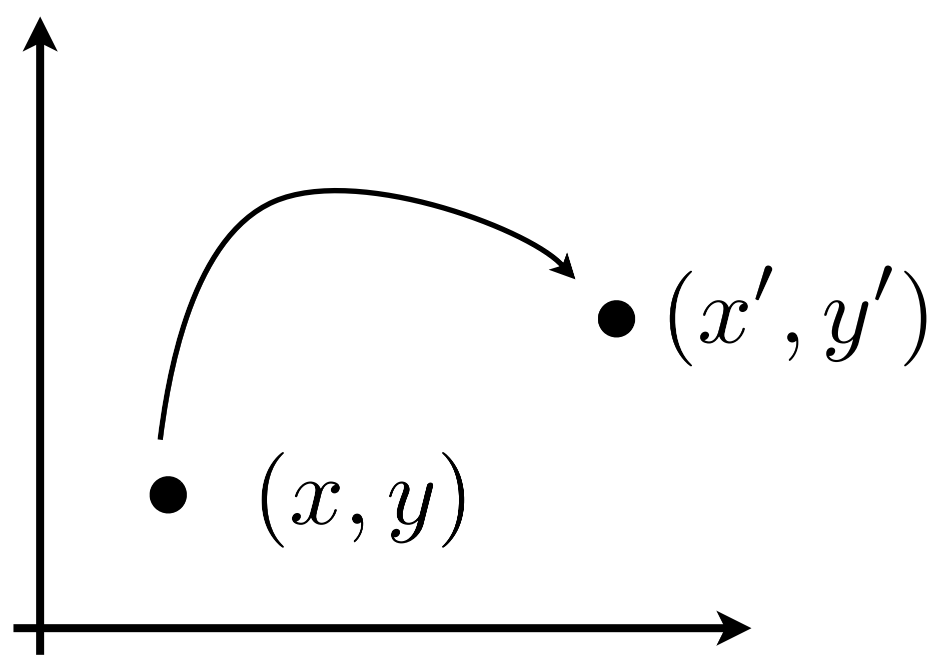
回転
原点を中心とする拡大
反転など

(0, 0)は必ず(0, 0)へ変換される

１次変換を含むより複雑な変換

- アフィン変換 (Affine transformation) は平行移動も表現できる.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$



アフィン変換＝1次変換＋平行移動

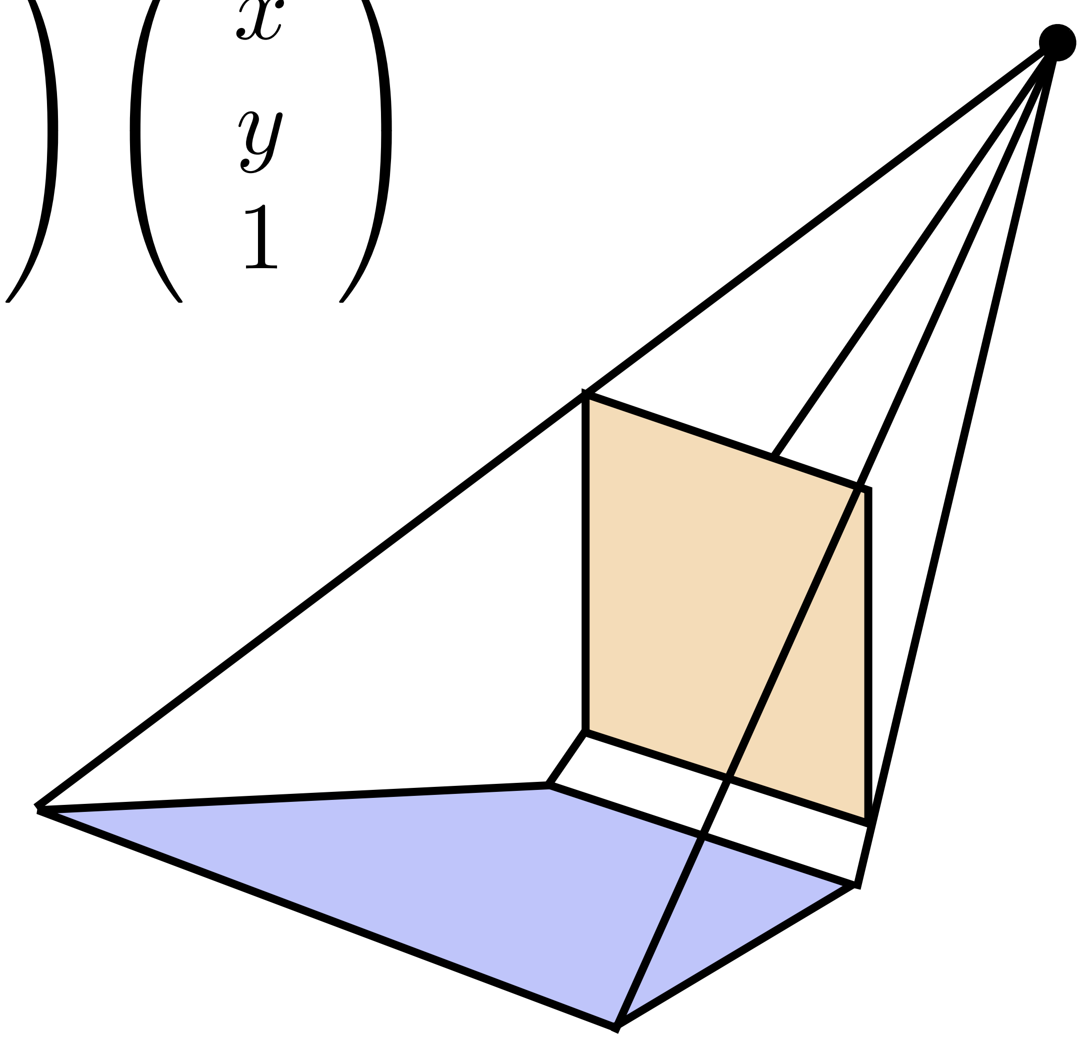
回転
原点を中心とする拡大
反転
に加えて平行移動

ユークリッド空間上の射影変換

- 射影変換は１次変換を含むより複雑な変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'/z' \\ y'/z' \end{pmatrix}$$



アフィン変換は射影変換の一部である

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

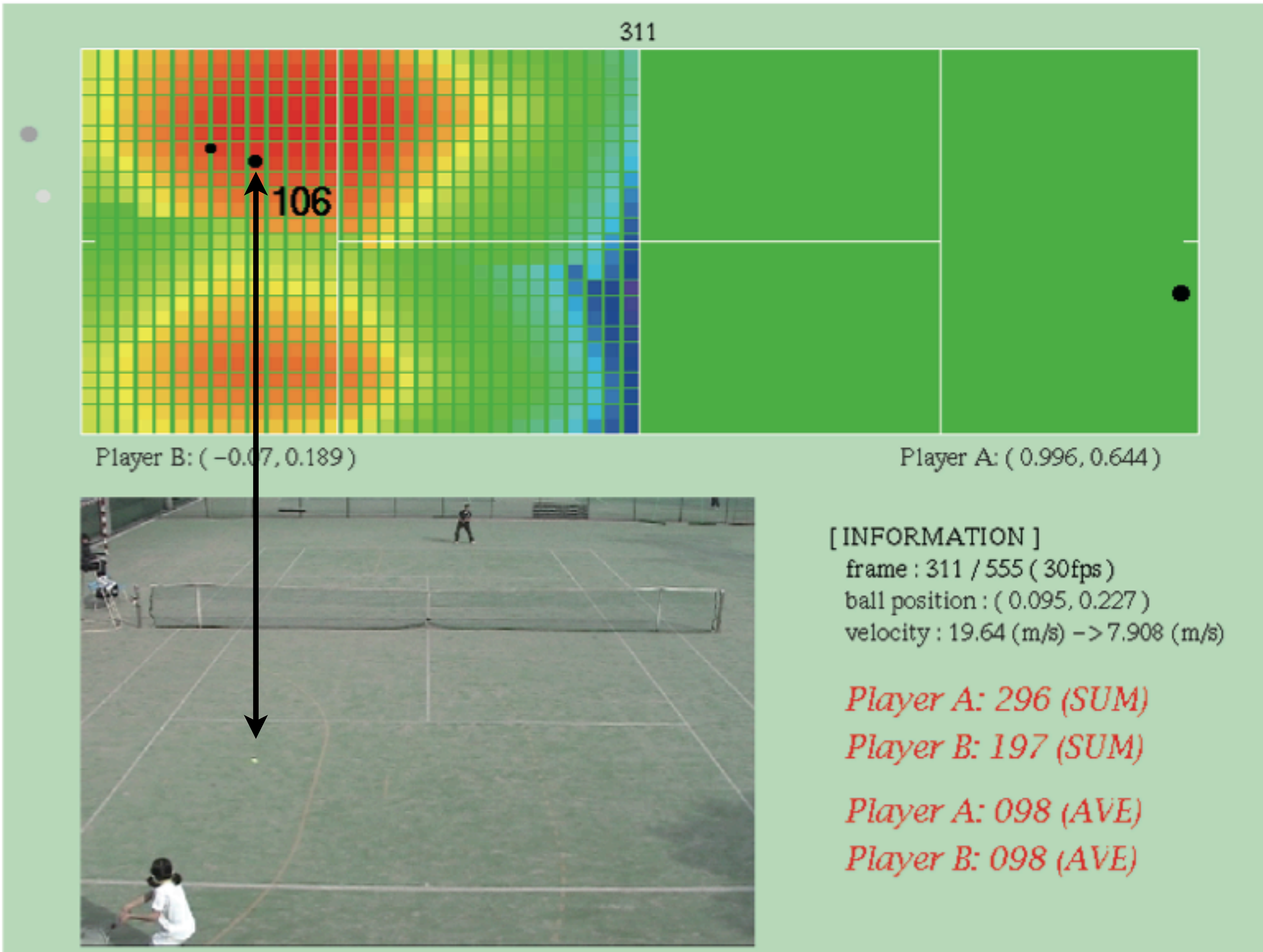
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'/z' \\ y'/z' \end{pmatrix}$$

g = h = 0 , i = 1とすれば,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'/1 \\ y'/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

射影変換の例


311
106
Player B: (−0.07, 0.189)
Player A: (0.996, 0.644)
[INFORMATION]
frame : 311 / 555 (30fps)
ball position : (0.095, 0.227)
velocity : 19.64 (m/s) −> 7.908 (m/s)
Player A: 296 (SUM)
Player B: 197 (SUM)
Player A: 098 (AVE)
Player B: 098 (AVE)

本日のまとめ

- 集合の定義，演算，基本的性質
- 関係の定義
- 順序関係，同値関係，同値類
- 写像と関数