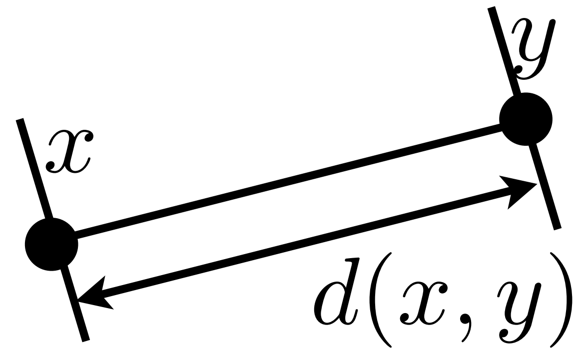
幾何学入門第３回
距離空間と開集合

山本修身
名城大学理工学部情報工学科

今回学ぶこと



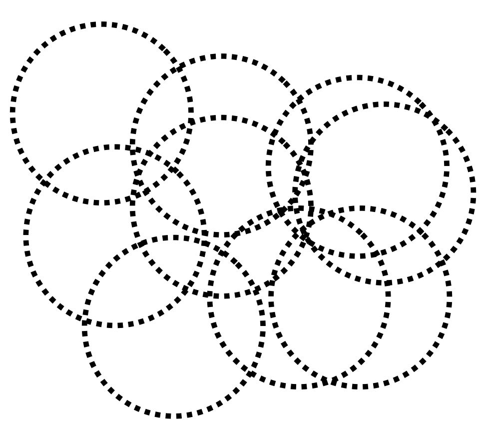
$$\sqrt{(x_x - y_x)^2 + (x_y - y_y)^2}$$

我々は比較的良く知っている

距離空間の性質（定義）

位相空間の性質（定義）

距離空間の**「近さ」**だけを抽象化したもの



ユークリッド空間とは

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

- n次元の**ユークリッド空間 (Euclidean space)** とはn個の要素よる座標$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表現される点の集合でその２つ要素 p, q の間の距離を以下のように測る.

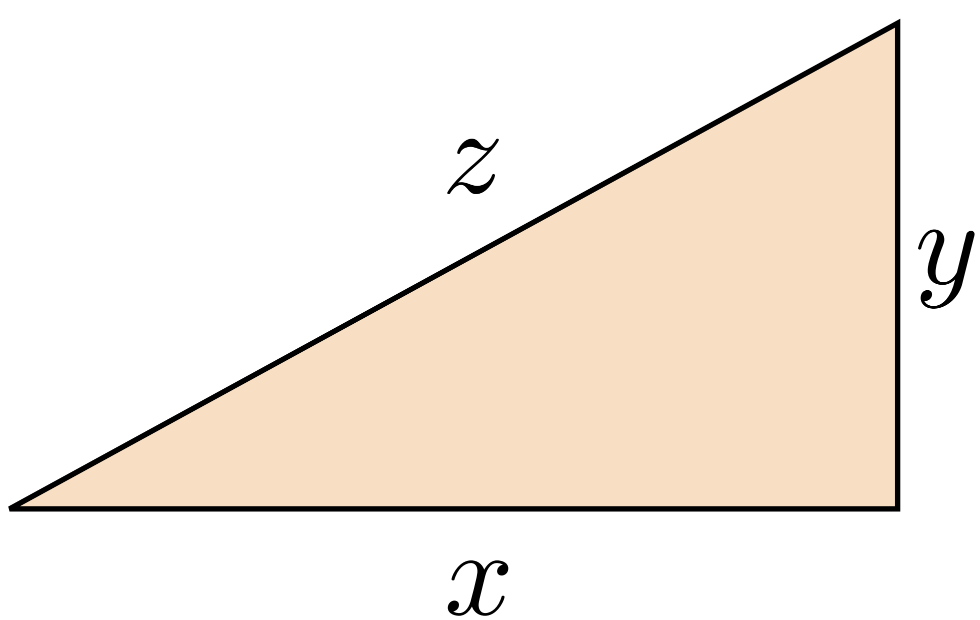
p, qの距離

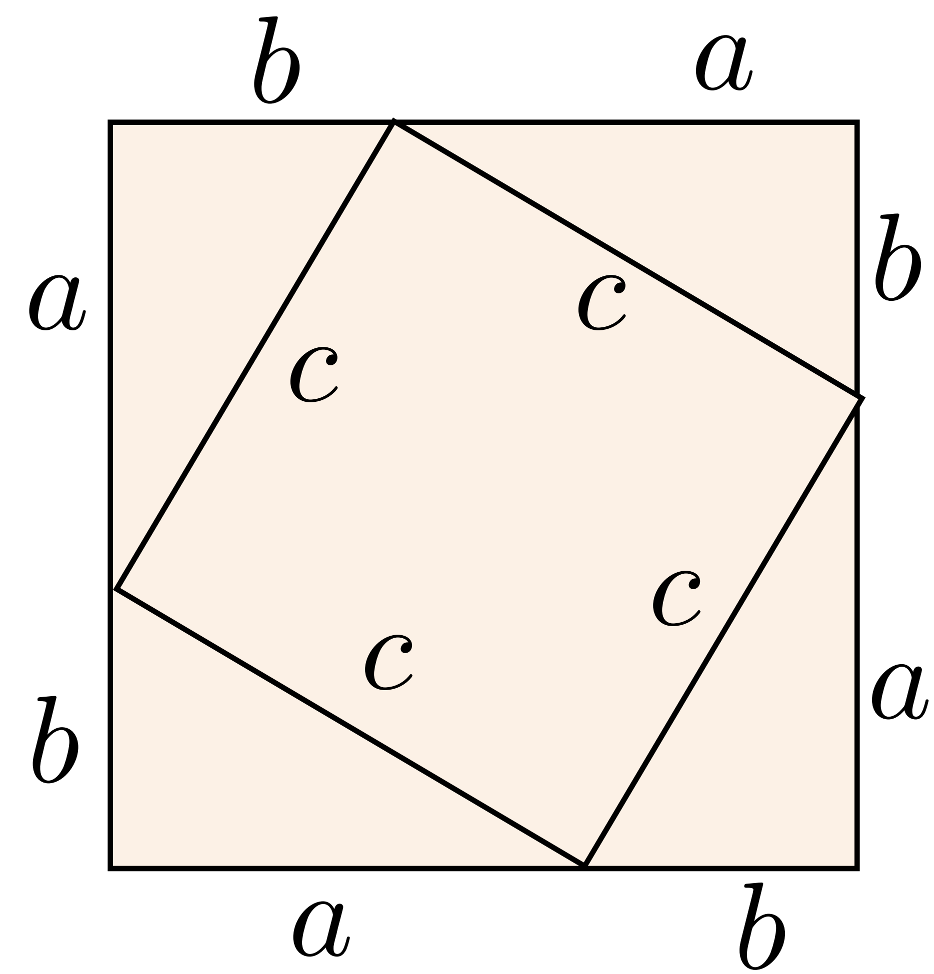
$$\boxed{d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|^2}}$$

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

ピタゴラスの定理

- ピタゴラスの定理はユークリッド空間の定義そのもの





$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

距離空間とは

- **距離空間 (metric space)**とは集合で，そこに含まれる要素（これを点と呼ぶ）の間に以下の性質を満たす<u>**距離** d</u>が定義されている：

1. 任意の点 $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ について $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

   三角不等式

2. $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.　距離が0⇒同じ点

3. $d(p,q) = d(q,p)$　対称性

普通でない距離の測り方

- ユークリッド空間での距離の定義と異なる定義
  - マンハッタン距離

$$d(p,q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

  - ∞-ノルム

$$d(p,q) = \max_{i=1,\ldots,n} |p_i - q_i|$$

ユークリッド空間における近傍とは

- 近傍とは与えられた点の「近く」のこと

$$N_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) < \varepsilon\}$$

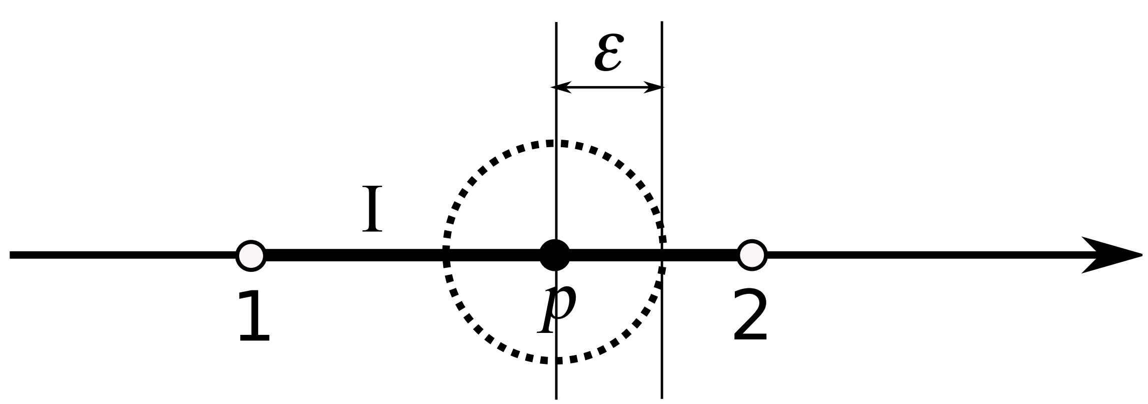
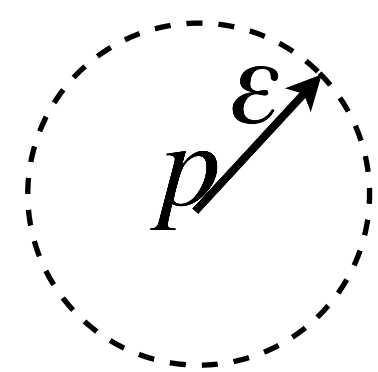


図 3.1: 区間 $(1,2)$ とそれに含まれる ε 近傍



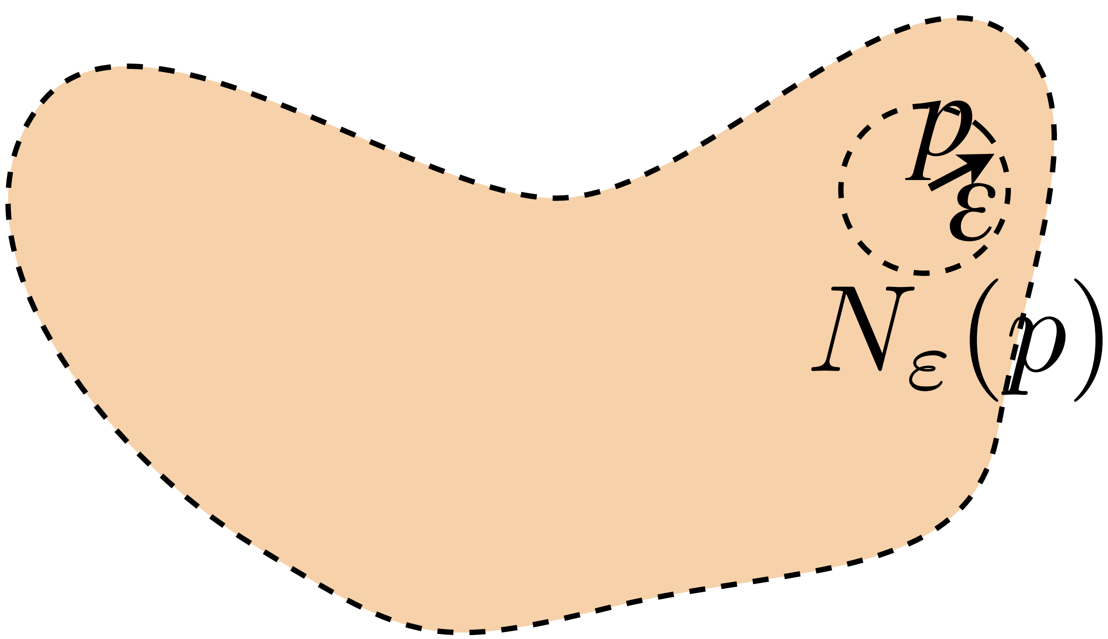
$$\varepsilon > 0$$

ユークリッド空間における開集合

- **開集合 (open set)** とは，…

ある集合 X が**開集合**であるということは，任意の点 $p \in X$ について，ある ε が存在して，$N_\varepsilon(p) \subset X$ となるものが常にとれると定義します.

$$\forall p \in X, \exists \varepsilon > 0, N_\varepsilon(p) \subset X$$



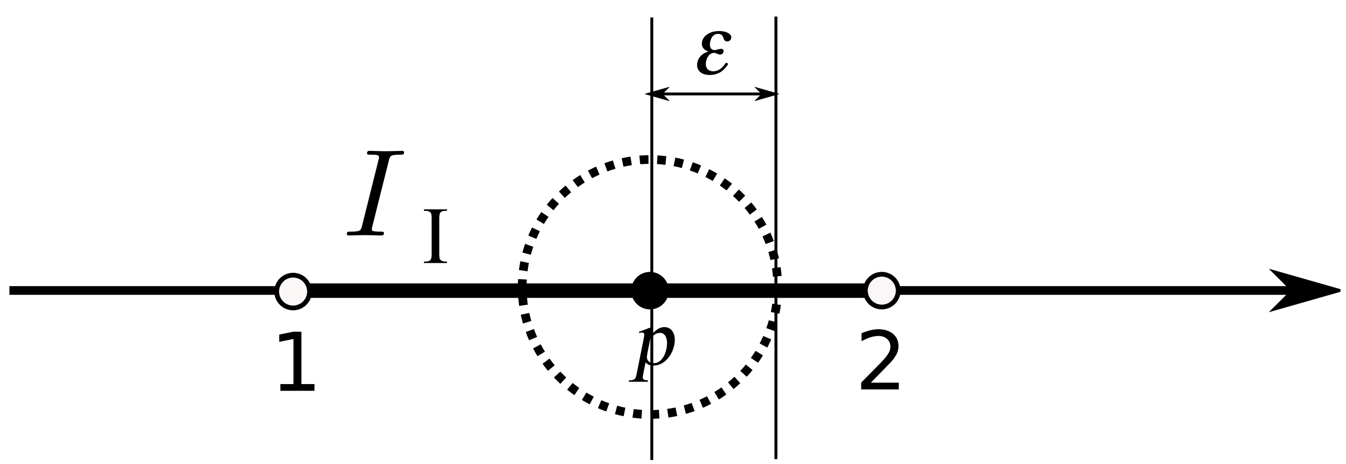
区間 (1, 2) はなぜ開集合か？

（開区間）

- 区間 (1, 2) が開集合であることの証明

$$1 < p < 2$$

$$\varepsilon = \min\{2-p, p-1\}/2$$



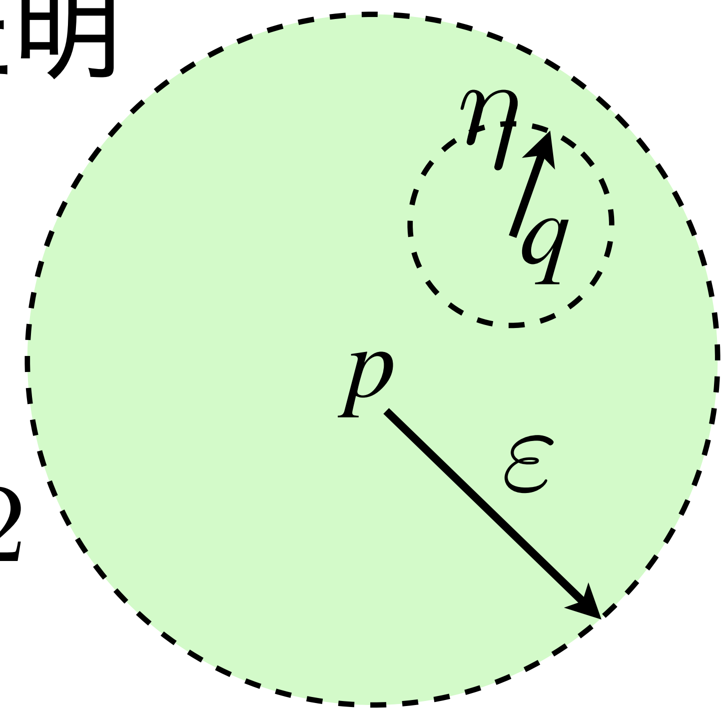
$$N_\varepsilon(p) \subset I$$

端点を含まない

図 3.1: 区間 $(1,2)$ とそれに含まれる ε 近傍

ε 近傍は開集合か？（性質５）

ε 近傍は開集合であることの証明



$$q \in N_\varepsilon(p)$$

$$\eta = (\varepsilon - d(q,p))/2$$

$\boxed{r \in N_\eta(q) \text{ と仮定すると}}$

$$\begin{aligned} d(r,p) &\leq d(r,q) + d(q,p) \leq (\varepsilon - d(p,q))/2 + d(p,q) \\ &= \varepsilon/2 + d(p,q)/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$$r \in N_\varepsilon$$

$N_\varepsilon(p)$ は開集合 $\quad N_\eta(q) \subset N_\varepsilon(p)$

ユークリッド空間の性質

- ユークリッド空間についてつぎの性質が成り立つ.

性質 6 X を適当なユークリッド空間であるとする.

1. X はそれ自体は開集合である.
2. 空集合 $\emptyset$ は開集合である.
3. ２つの集合 A, B が開集合であれば，その共通部分 $A \cap B$ は開集合である.
4. 任意個の開集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は開集合である.

性質6-1と6-2について

- Xをユークリッド空間とする．Xは開集合である．
  - 任意の点 X をとると，その ε 近傍は当然Xに含まれる．→ Xは開集合
  - 空集合についてはいかなる点をとることもできない．したがって，

$$\underline{p \in \emptyset} \Rightarrow N_\varepsilon(p) \subset \emptyset$$

は正しい命題となる．

これは成り立たない

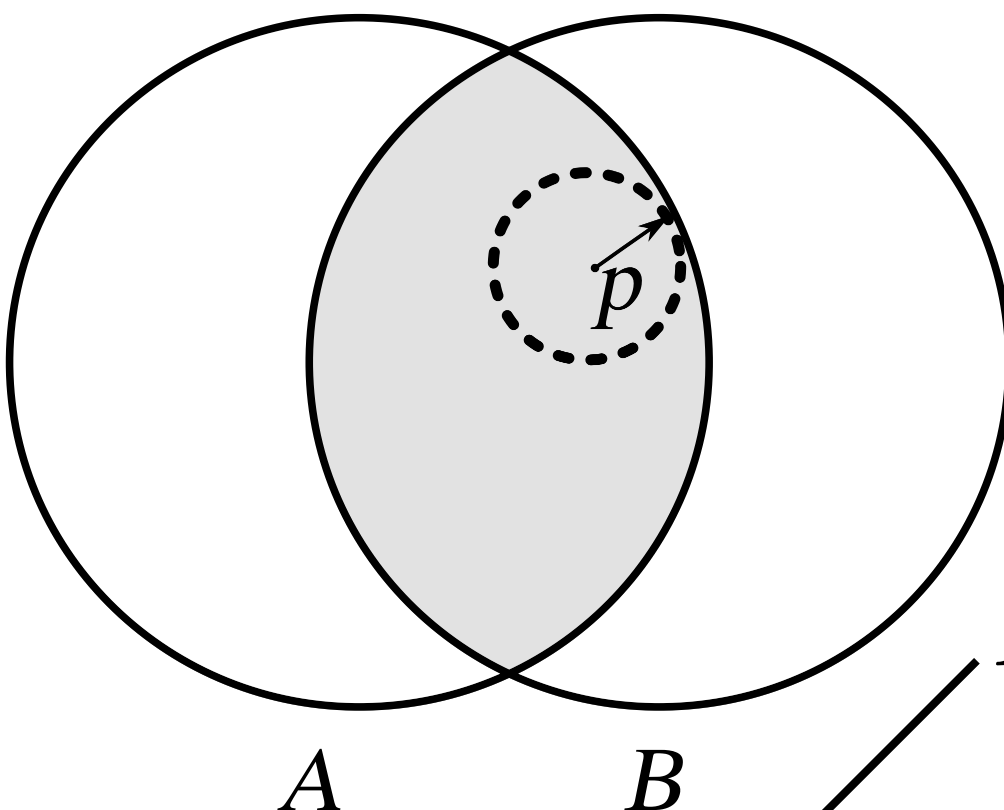
性質6-3について

- 集合A, Bが開集合であれば，AとBの共通部分は開集合である.

$$p \in A \cap B$$

$$p \in A$$

$N_\varepsilon(p) \subset A$ となる ε が存在



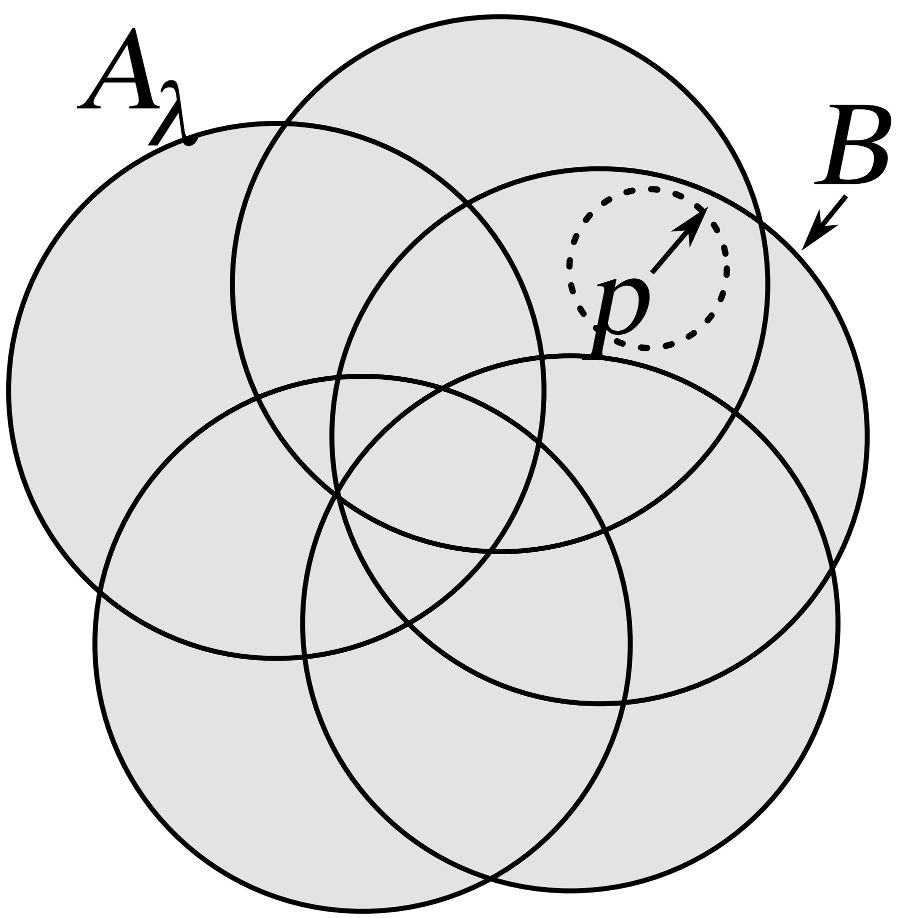
$N_\varepsilon(p) \subset B$ となる ε が存在

$N_\varepsilon(p) \subset A \cap B$

となる ε が存在

性質6-4について

- 任意個の開集合 $A_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ の和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合である.



$p \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と仮定する

↓

$p \in B$ となるBを選択できる

$$N_\varepsilon(p) \subset B \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

となる ε が存在

無限個の開集合の共通部分は開集合か？

- 反例：

$$X_i = (0, 1 + 1/i) \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

Yは開集合か？ ⟹ NO!

$\boxed{Y = (0, 1] \quad \text{である}}$

ここまでのスキームとここからのスキーム

- 距離空間→ε近傍→開集合
- 集合＋開集合の集合（**これが位相空間**）→近傍

近さだけを表現したい.

距離という概念はいらない！

一般の位相空間

- **位相空間 (topological space)**とはある集合でその集合の部分集合族（部分集合の集合）で次の性質を満たすものが定義されているものである.

開集合の集合 $\mathcal{O}$ の満たすべき性質

1. 空間 X と空集合は $\emptyset$ は $\mathcal{O}$ に含まれる.
2. 有限個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が $\mathcal{O}$ に含まれれば，共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ は $\mathcal{O}$ に含まれる.
3. 無限個の集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は $\mathcal{O}$ に含まれる.

特殊な位相空間

- 密着位相（dense topology）

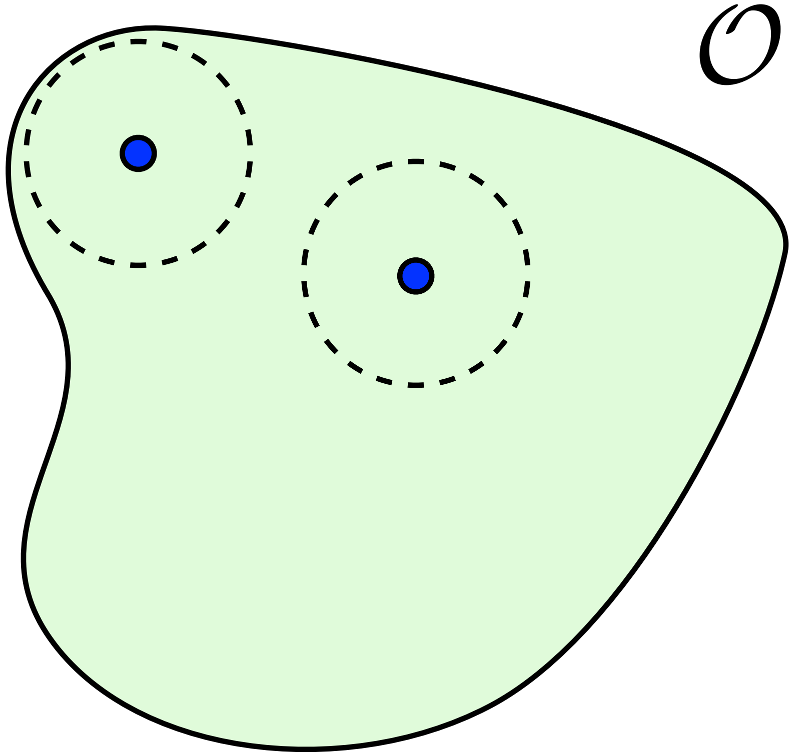
何も分離できない

$$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$$

ベタベタ

- 離散位相（discrete topology）

$$\mathcal{O} = \mathcal{P}(X) \leftarrow$$ Xのべき集合



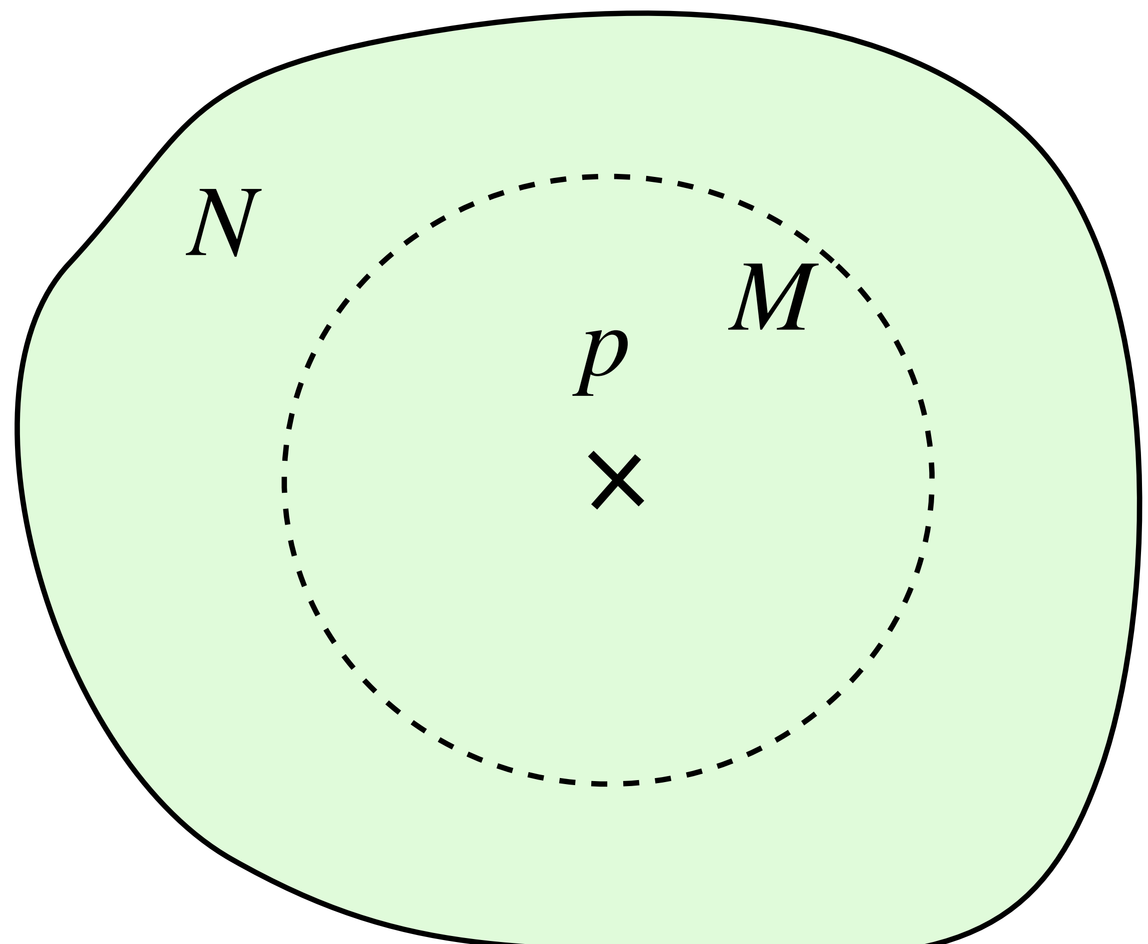
サラサラ

何でも分離することができる

一般の位相空間の近傍とは何か

- 「点pの近傍Nである」とは，$N \supset M \supset \{p\}$となる開集合$M$が存在するような部分集合$N$のことである.

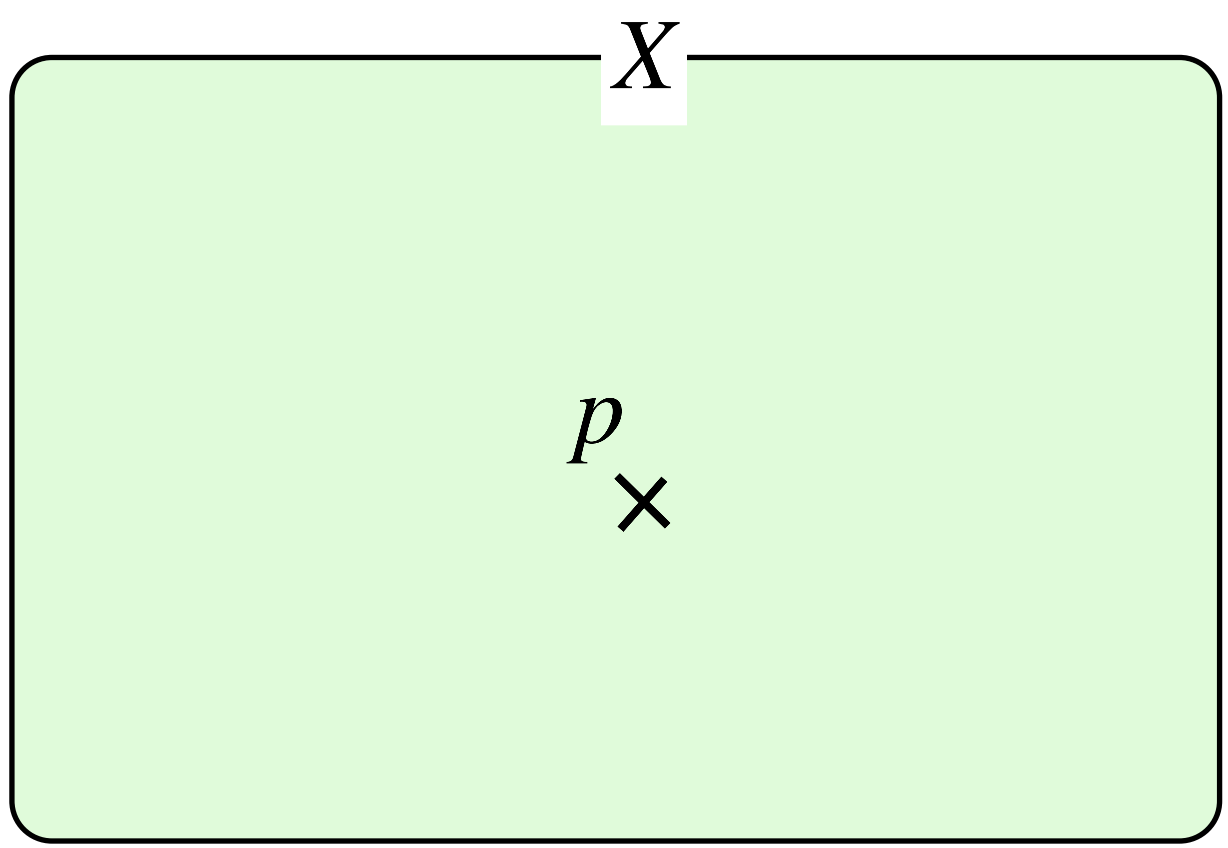
Nが開集合である必要はない



密着位相空間の場合

- 任意の点pの近傍は全体集合Xのみ $\boxed{N \supset X \supset \{p\}}$
- Xの開集合はXか空集合である．Xを含む集合はXのみである.

pを含む開集合はXのみ

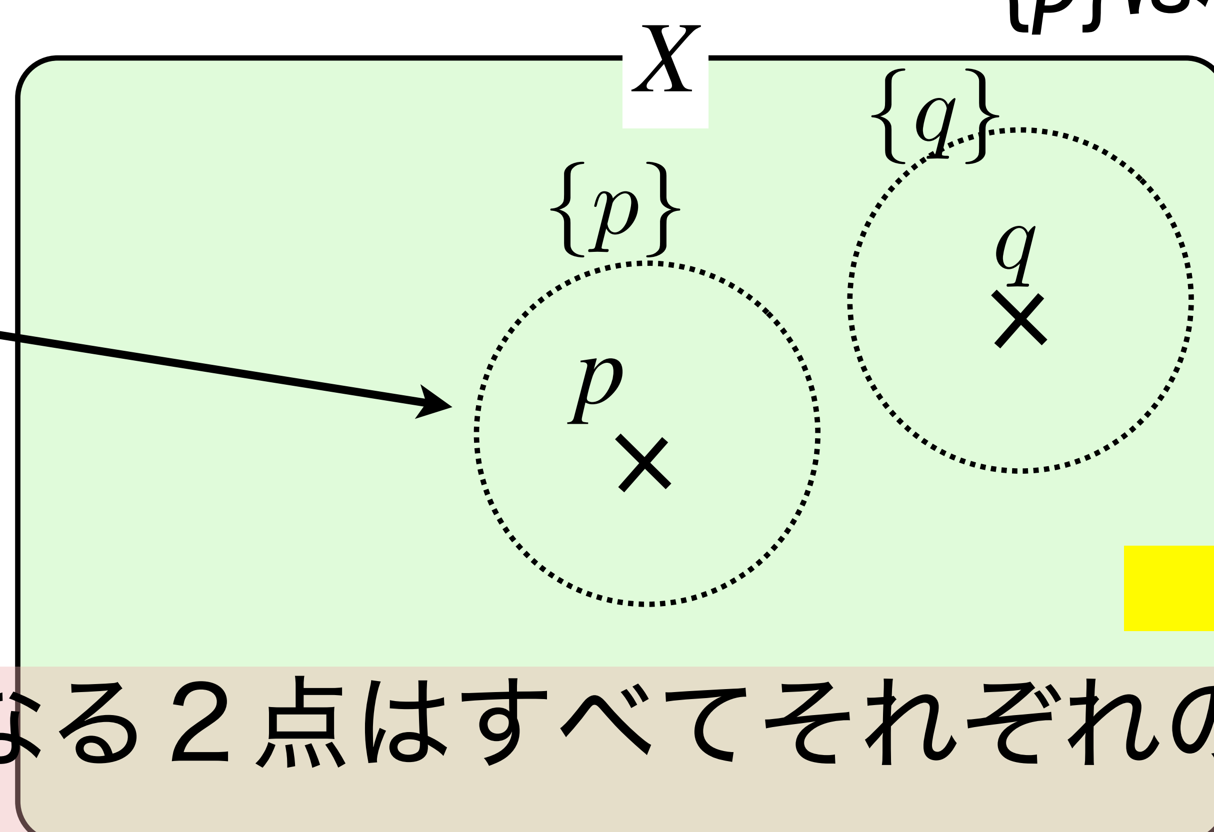


離散位相空間の場合

- ある点pを含むどのような集合も近傍となる
  - どのようなXの部分集合も開集合なので，そのうちpを含むものはすべてpの近傍となる.

{p}はpの近傍である

どのような部分集合も近傍となる



ハウスドルフ空間

異なる２点はすべてそれぞれの近傍で分離することができる

閉集合とは

- 補集合が開集合となる集合を**閉集合 (closed set)**と呼ぶ. $\mathcal{C}$

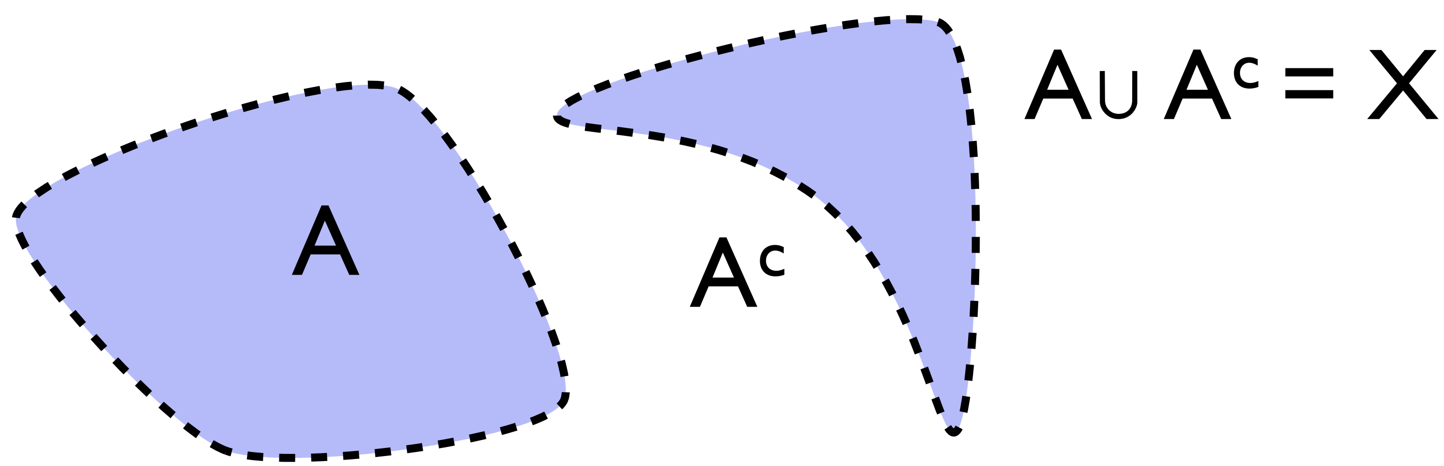
- 空間全体Xや空集合は開集合であり， $X^c = \Phi$,　$\Phi^c = X$ なのでこれらは閉集合であり開集合である.

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$$

$$A_\lambda \in \mathcal{C} \quad (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{C}$$

連結性について

- 空間Xが**連結**であるとは，Xのある部分集合Aで閉集合でありかつ開集合であるものがとれないことである．ただし，Aは空集合でもX自身ではない．



密着位相⇒連結

離散位相⇒１点以外のどのような部分空間も連結ではない

ユークリッド空間の位相はどのように定めるか

- 我々の良く知っているユークリッド空間の位相はどのように定義するか.
  - ユークリッド空間の開集合とは，開区間の和集合によって表現されるものの全体．ただし，開区間とは，

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \underline{a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_n < x_n < b_n}\}$$

と表現できる部分集合のこと.

これのことを「基」という

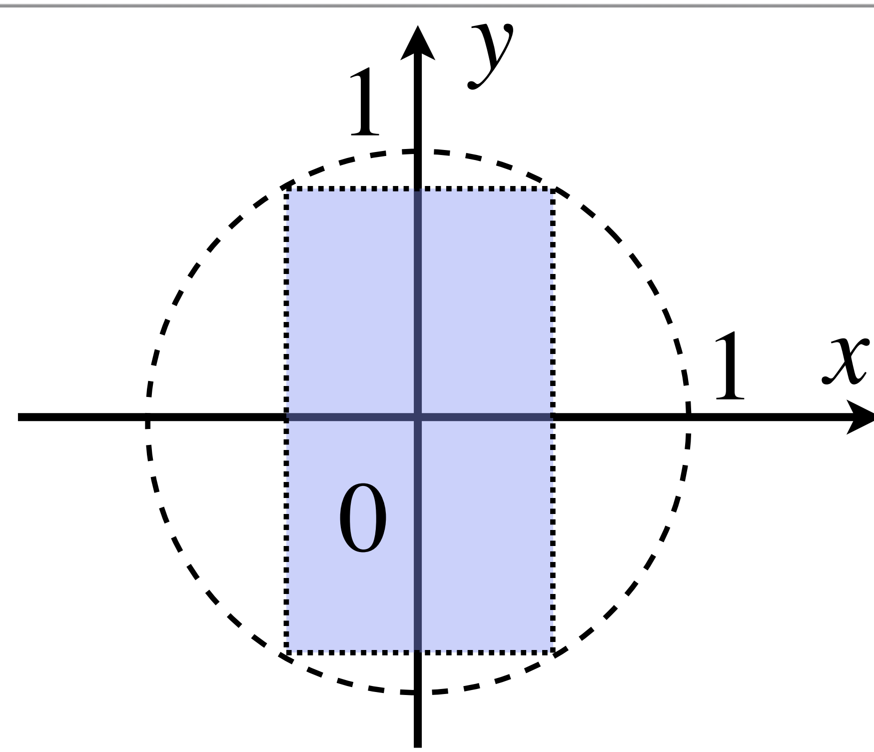
チャレンジ問題

- ユークリッド平面上の周を含まない円盤が開集合であることを証明せよ.

チャレンジ問題（解答編）

- 原点を中心とする半径１の円盤Uはつぎのように表現できる：

$$U = \bigcup_{0 \le t \le 1} \left\{ (x, y) \mid |x| < t, |y| < \sqrt{1 - t^2} \right\}$$



部分空間の位相

- 空間全体について議論するだけでは，議論できる空間の範囲が狭い．ある位相空間の一部を切り取ったような空間の位相はどのように定めるか考えてみる．

- たとえば，つぎの空間の位相はどのように決めるか？

$$\boxed{R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}}$$

正方形

部分空間の位相

- ある位相空間Xの部分集合Yの開集合をつぎのように定めることができる.

$$\mathcal{O}_Y = \{m \cap Y \mid m \in \mathcal{O}_X\}$$

Yの開集合

Xの開集合

$$Y \subset X$$

前述の開集合族は開集合の定義を満たすか(I)

- この集合族は空集合と全体集合 (Y)を含む
- Yの２つの開集合はつぎのように書ける.

$$m_1 = n_1 \cap Y, m_2 = n_2 \cap Y$$

よって,

$$m_1 \cap m_2 = (n_1 \cap Y) \cap (n_2 \cap Y) = \underline{(n_1 \cap n_2) \cap Y}$$

これはYの開集合

前述の開集合族は開集合の定義を満たすか(2)

無限個のYの開集合はつぎのように書くことができる.

$$m_\lambda = n_\lambda \cap Y$$

したがって,

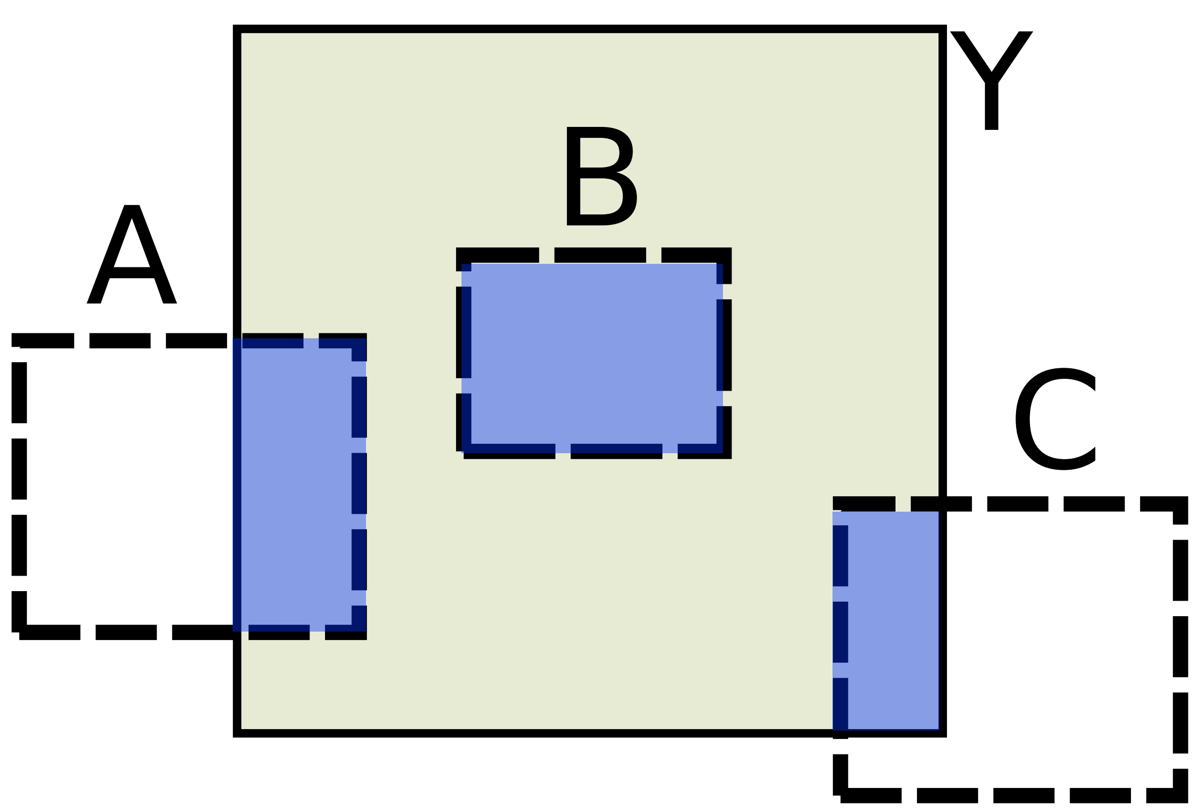
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (n_\lambda \cap Y) = \underline{\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \right) \cap Y}$$

以上より,この方法で定義される
開集合族は定義に矛盾しない

これはYの開集合

正方形の開集合族

- 正方形の場合，以下のような矩形領域（境界を含まない）とYの共通部分をいくつか（無限個でも良い）和集合をとったものが開集合族となる.

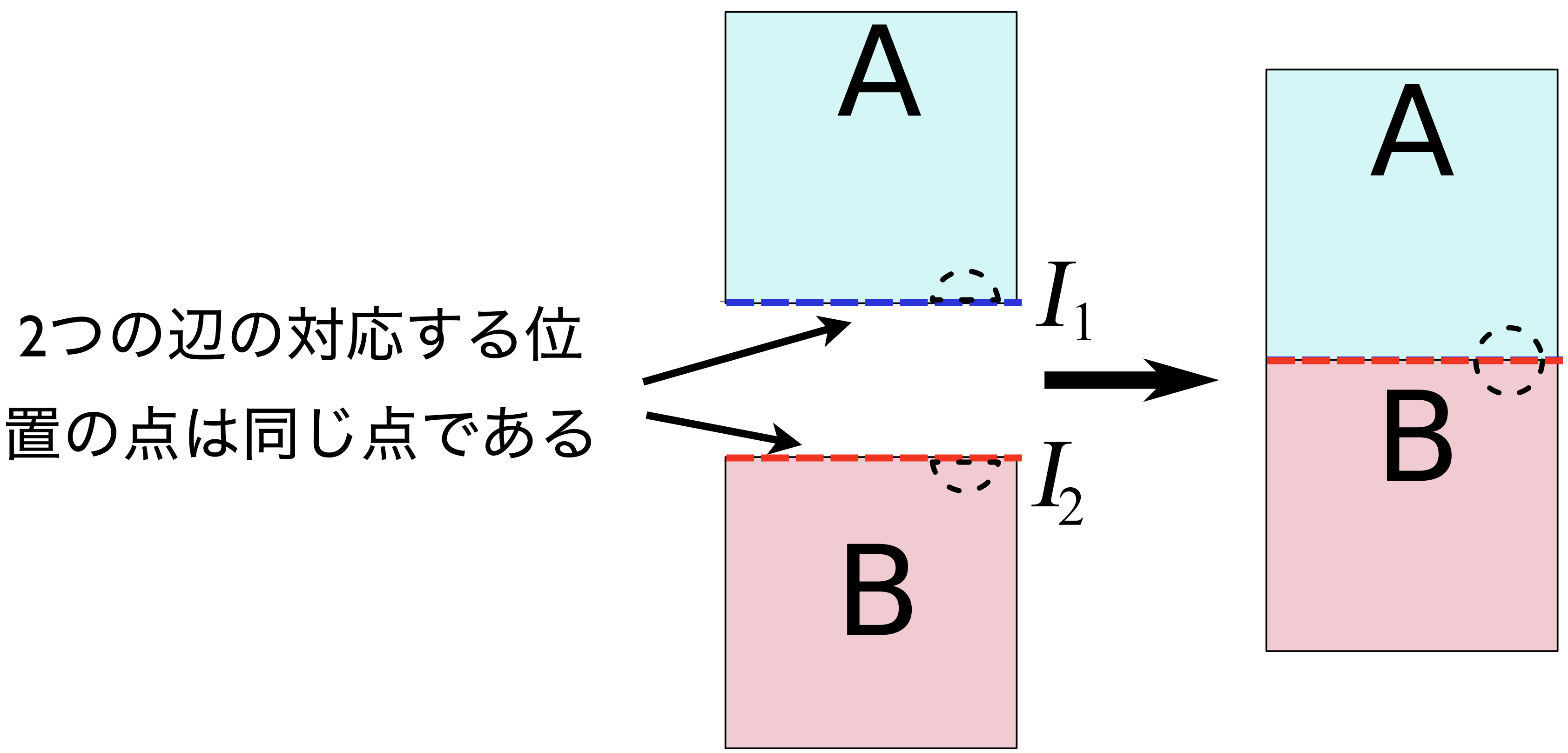


貼り合わせることの位相的な根拠

- 辺を重ねて貼り合わせるということはどういうことか？

$$\mathcal{O}_{A\cup B} = \{a \cup b \mid a \in \mathcal{O}_A, b \in \mathcal{O}_B\}$$

$$X = A \cup B \qquad ?$$



貼り合わせ

貼り合わせは同値類を考える

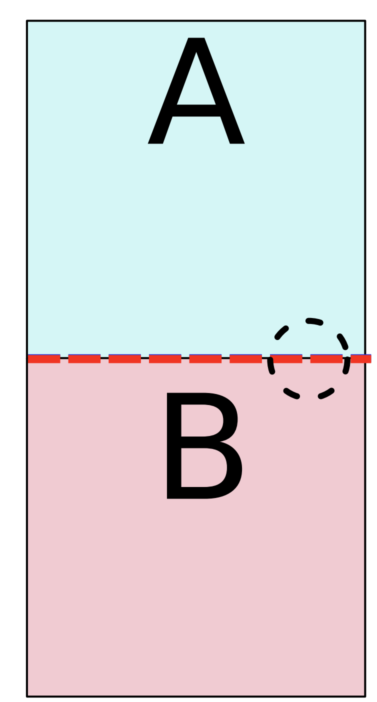
- 貼り合わせるということは，本来別の位置にある別の点を同じ点であると考えること.
- 位相空間では距離がない．集合とその開集合族が矛盾無く決定できれば良い. X $\mathcal{O}$

$A \cup B$ 上の同値関係を定義する

・貼り合わせる辺上にない点についてはx〜xのみ
・辺上の点ついては対応する点x，yについてx〜yと定義する.

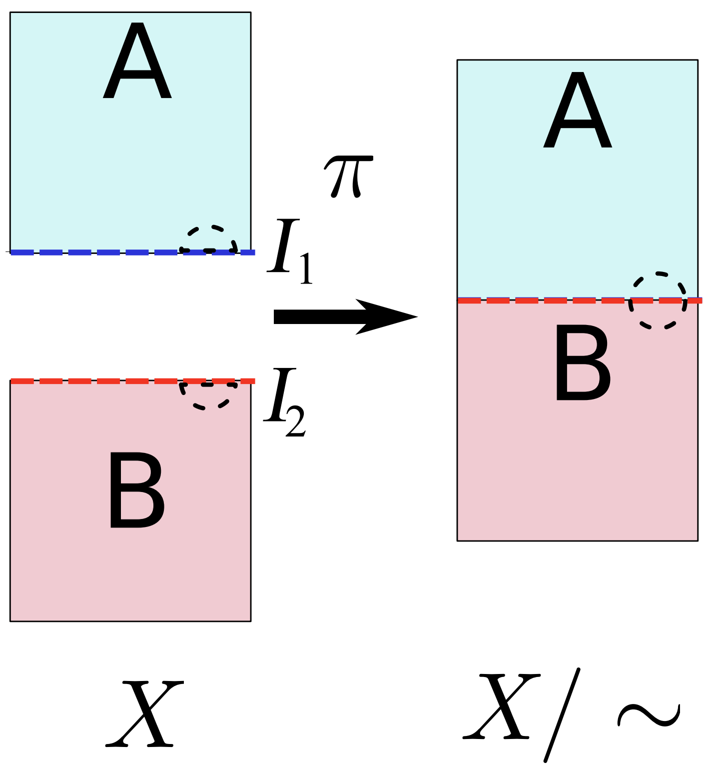
$$(A \cup B)/\sim$$

を考える



開集合族はどう決定するのか

- (A∪B) / ～の集合族をどのように決定するのか？



$$X = A \cup B$$
$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B$$

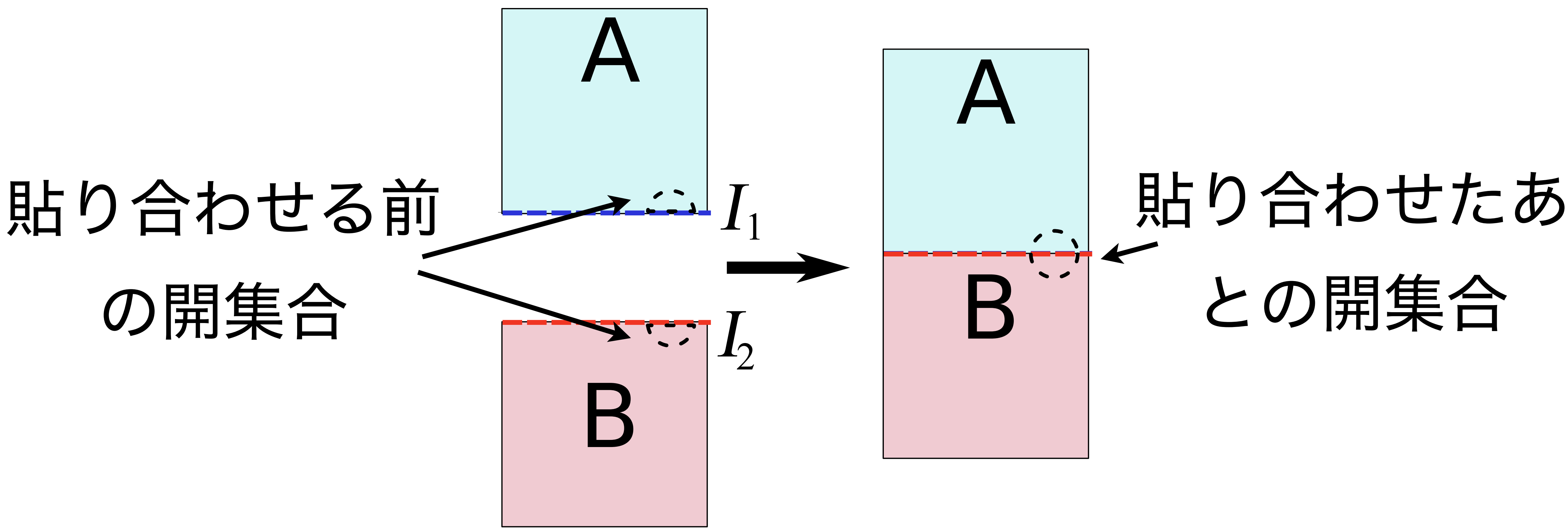
$$\boxed{\mathcal{O}' = \{O \subseteq X/\sim \ \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}\}}$$

πはXから同値類X/～への自然な写像

$$\pi : X \to X/\sim$$

図で見れば明らか

- 実際の貼り合わせは図で見れば明かである.



練習問題

- ユークリッド平面の半平面 $H = \{(x, y) \mid x > 0\}$が開集合であることを証明せよ
- 一般の半平面 $H = \{(x, y) \mid ax + by > 0\}$ が開集合であることを証明せよ．ただし，$a = b = 0$ではない．

ヒント：開集合の和集合は開集合である．

まとめ

- 集合とその集合の開集合族を定義することによって位相空間を定義することができる.
- 位相空間では距離は定義されないが，「近さ」の目安となる近傍を定義することができる.
- もとの集合に位相が定義されていれば，その部分集合にその位相を用いて位相を定義することできる.

前回の復習

- 位相空間とは,

集合＋開集合の集合（集合族）

X $\mathcal{O}$

性質 6 X を適当なユークリッド空間であるとする.

1. X はそれ自体は開集合である.
2. 空集合 $\emptyset$ は開集合である.
3. ２つの集合 A, B が開集合であれば，その共通部分 $A \cap B$ は開集合である.
4. 任意個の開集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は開集合である.

開集合について

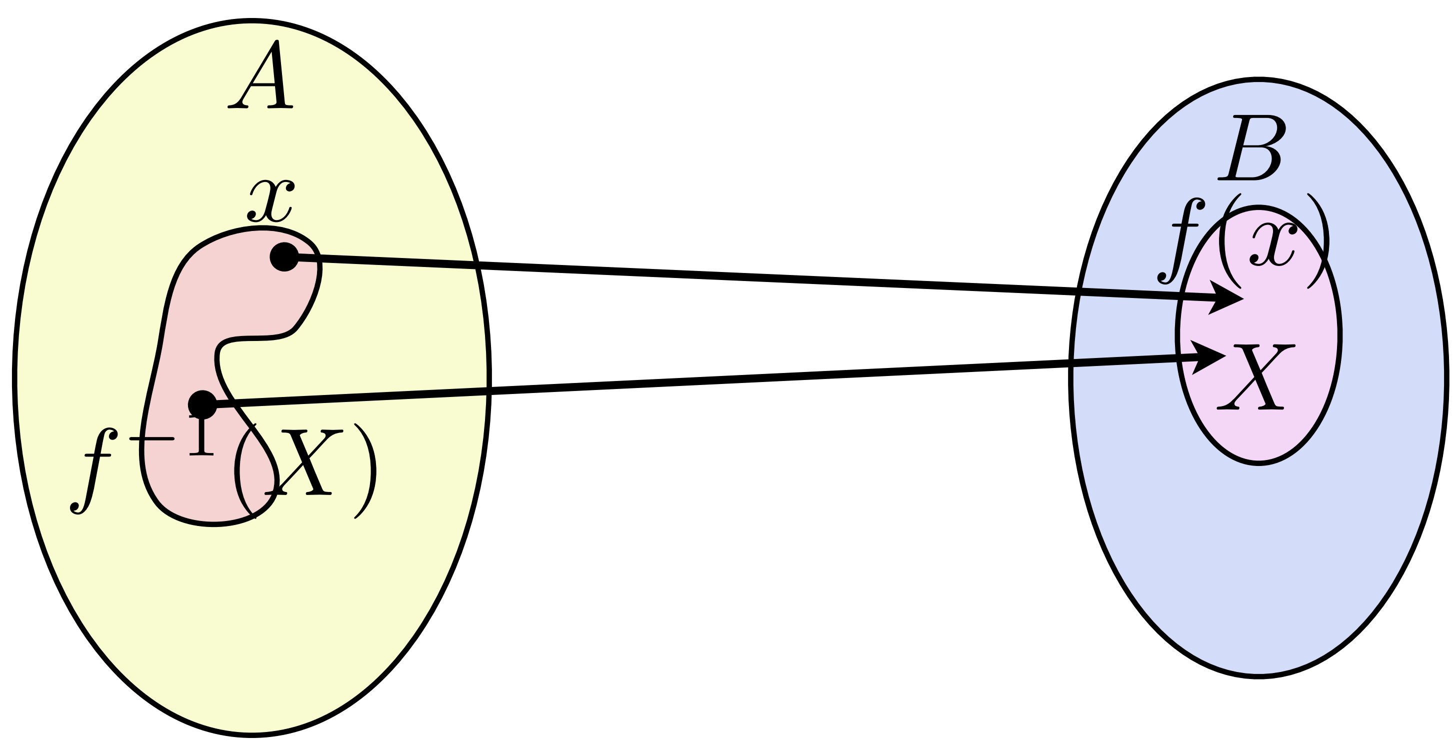
- 位相空間で開集合が多ければ，より分離しやすく，点どうしが離れていることになる.
- 位相空間で開集合が少なければ，分離しにくく，点どうしがくっついているイメージになる.
- ある点pの**近傍**Nとは，$N \supseteq X \supseteq \{p\}$ となる開集合Xが存在するような集合のことである.

写像の原像について（復習）

- 集合AからBへの写像において，適当なBの部分集合Xの原像とは

$$f : A \to B$$

$$f^{-1}(X) = \{x \in A \mid f(x) \in X\}$$



原像の例

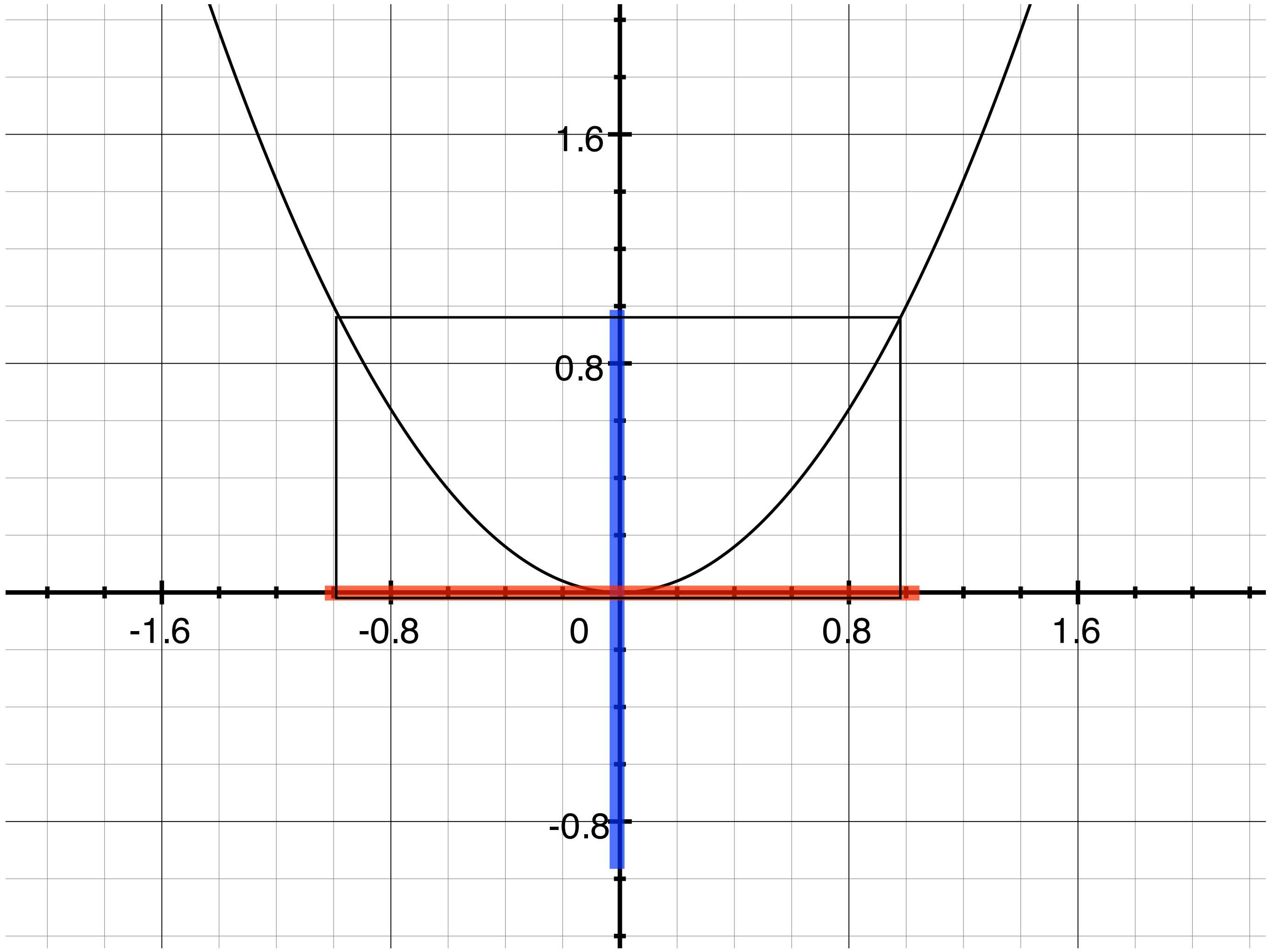
- 行き先として不適格なものの原像は空集合となる

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}((-1,1)) = (-1,1)$$

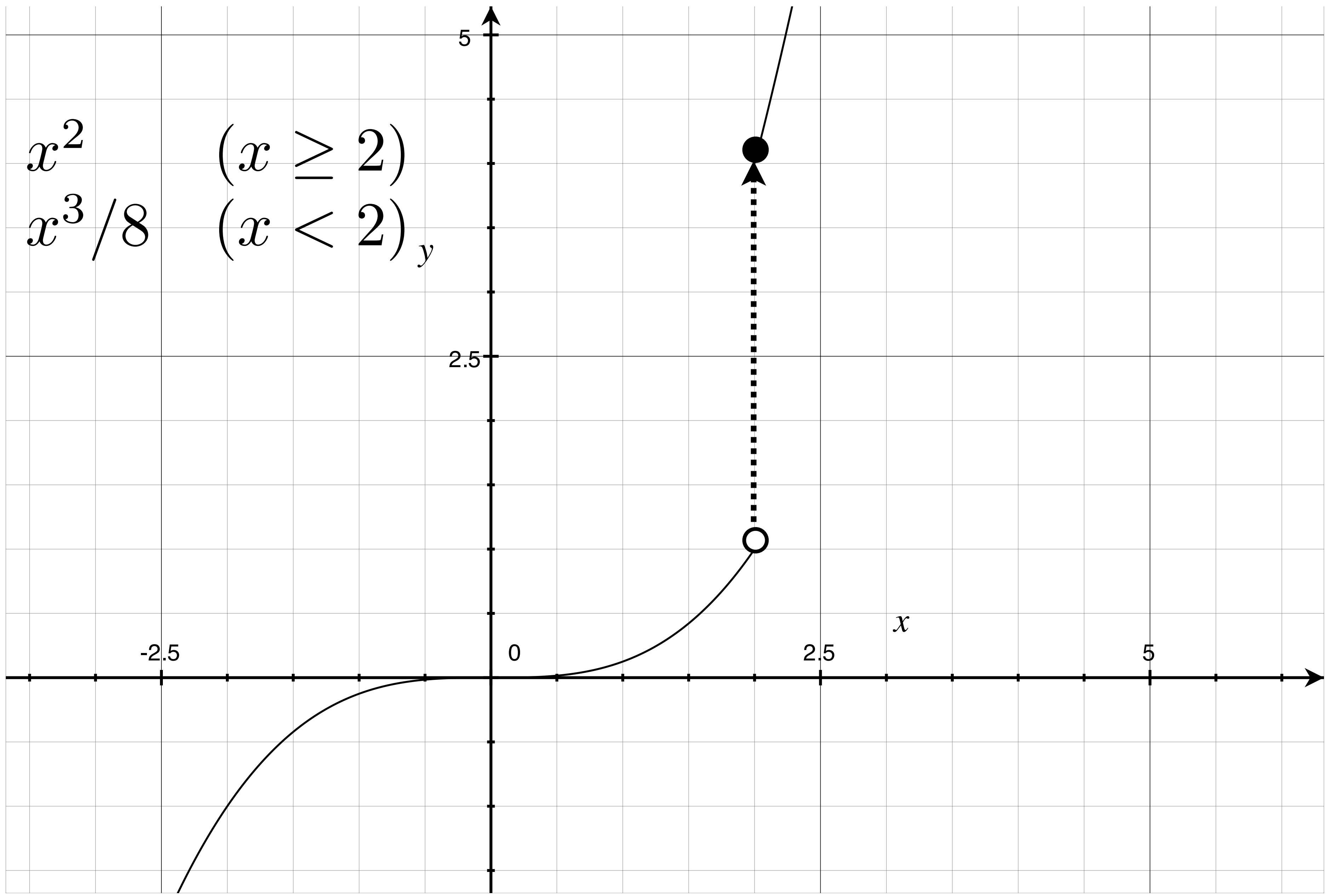
開区間



連続でないグラフ

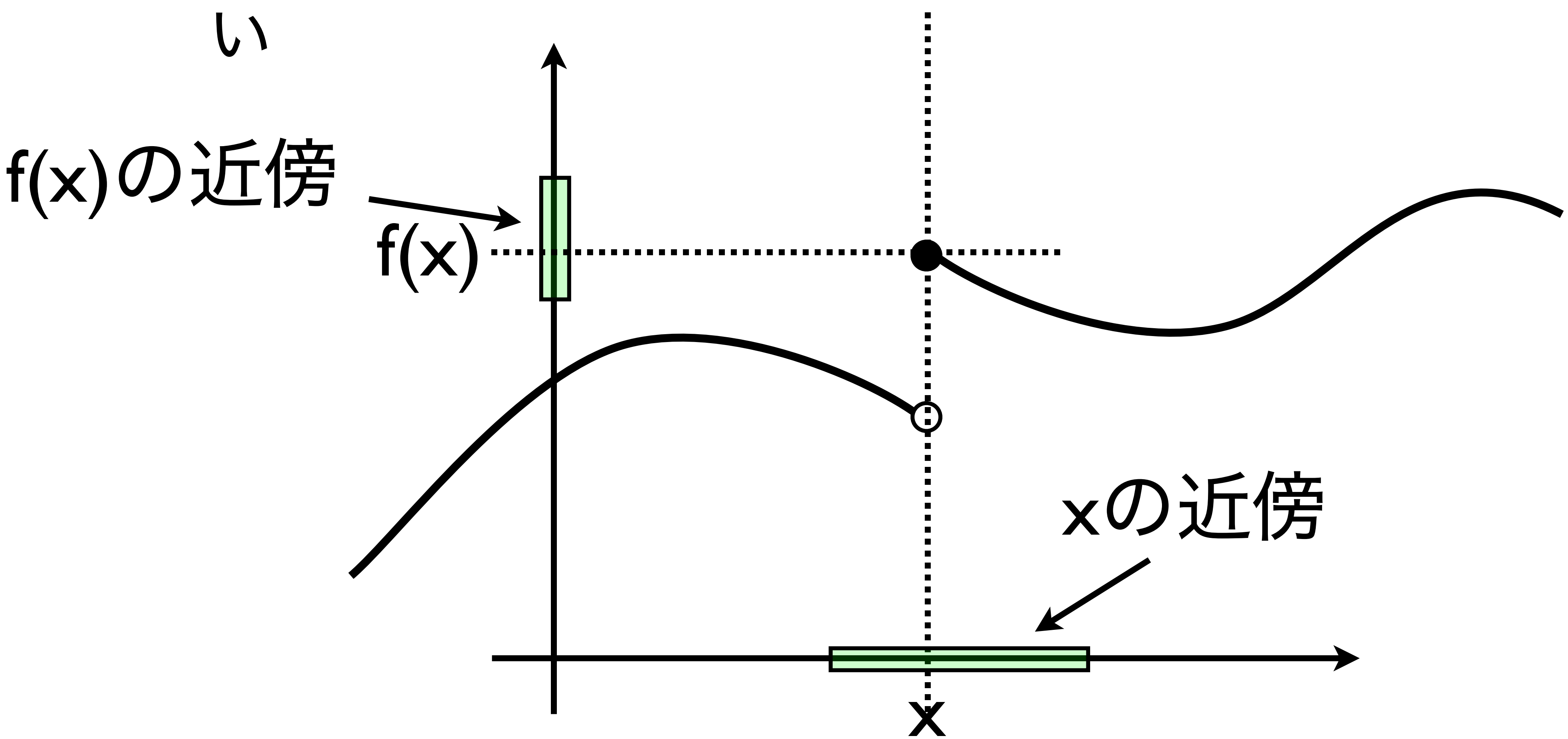
- 以下のグラフは連続ではない.
- このグラフはなぜ連続でないのか.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 2) \\ x^3/8 & (x < 2) \end{cases}$$



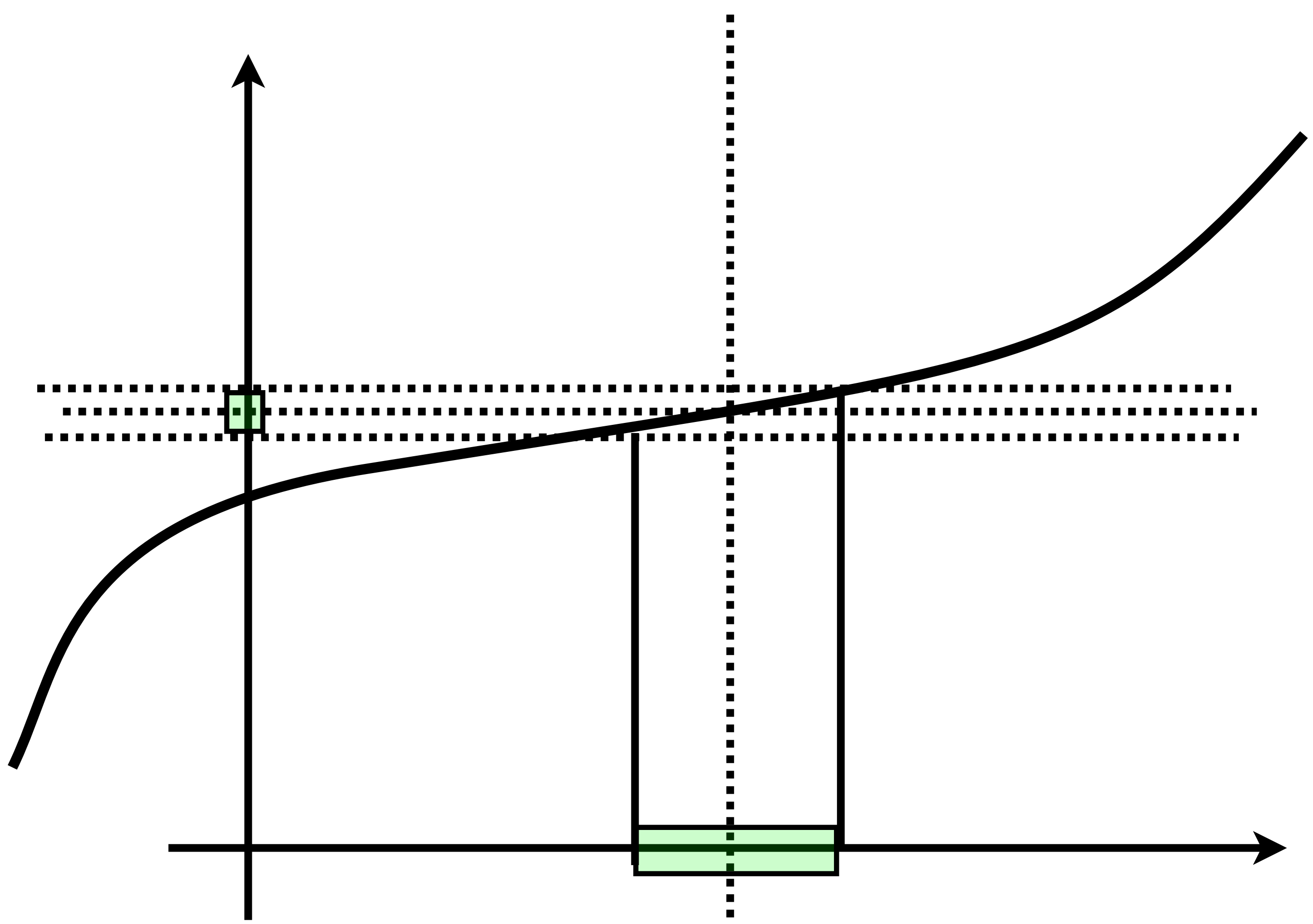
連続であることをどのように形式化するか

- 個別の点が関数によってどのように写像されるかを考えただけでは何も判断できない.
- 「つながっている」という情報を用いないといけない



連続である場合について検証する(I)

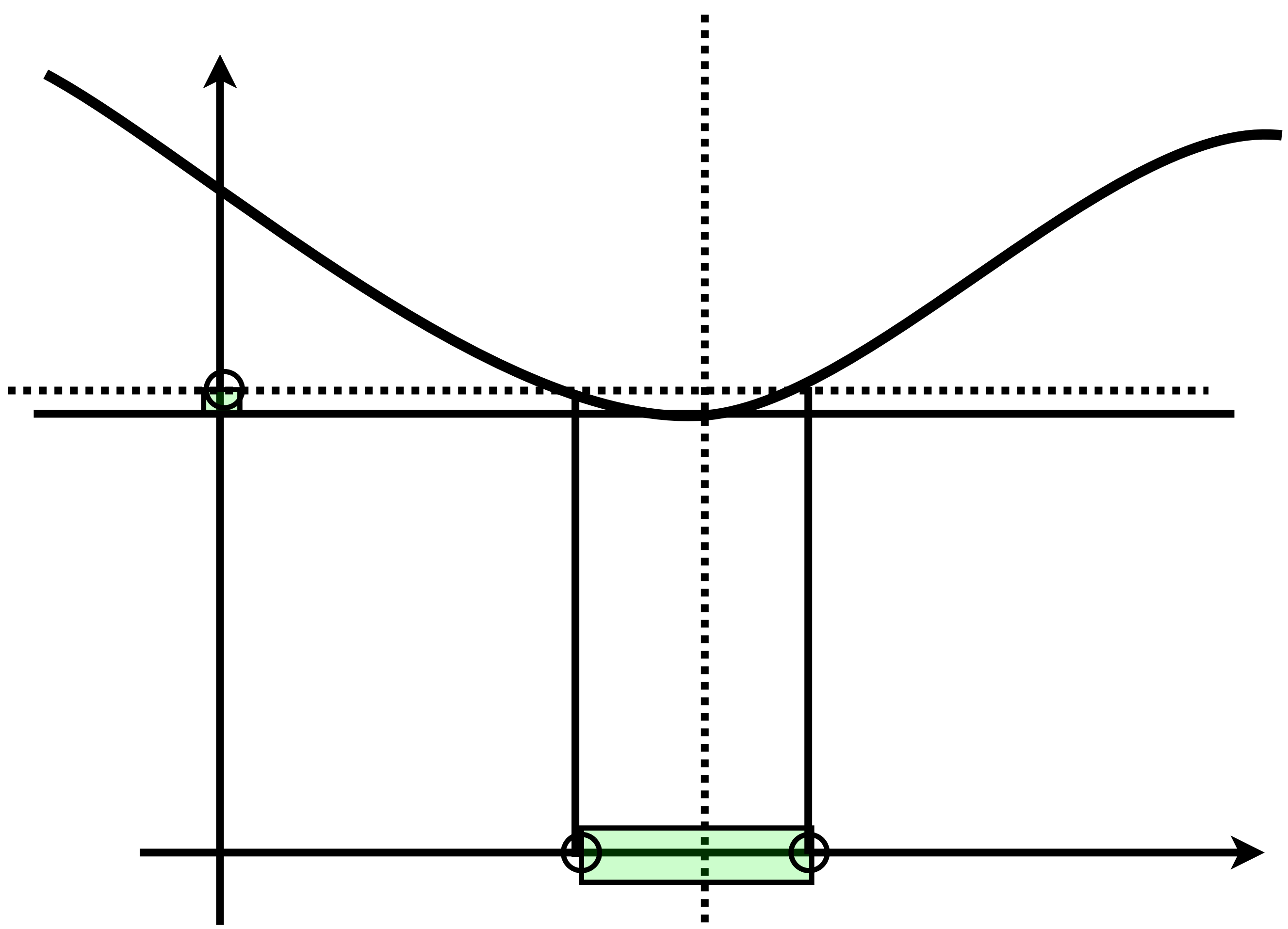
- 以下のケースは経験的に連続である.
- 近いものは近い場所に移される.



近傍が近傍に移されればよいのか？

連続である場合について検証する(2)

- 以下のケースも経験的に連続である.
- 近いものは近い場所に移されるが，近傍に移らない

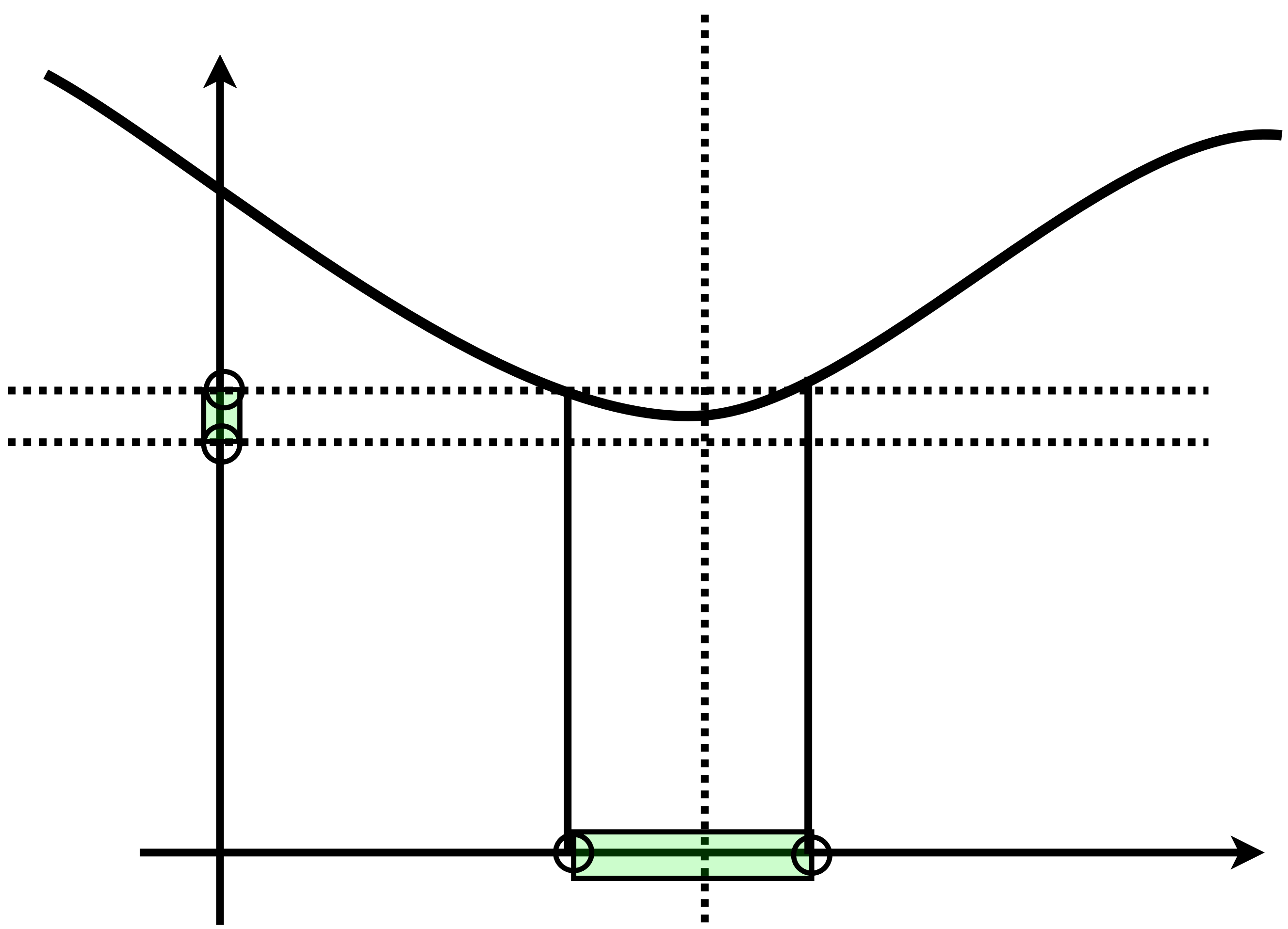


近傍は近傍にうつされない？

しかし，これは連続である.

連続である場合について検証する(3)

- このケースは経験的に連続である.
- 発想を逆転させる.

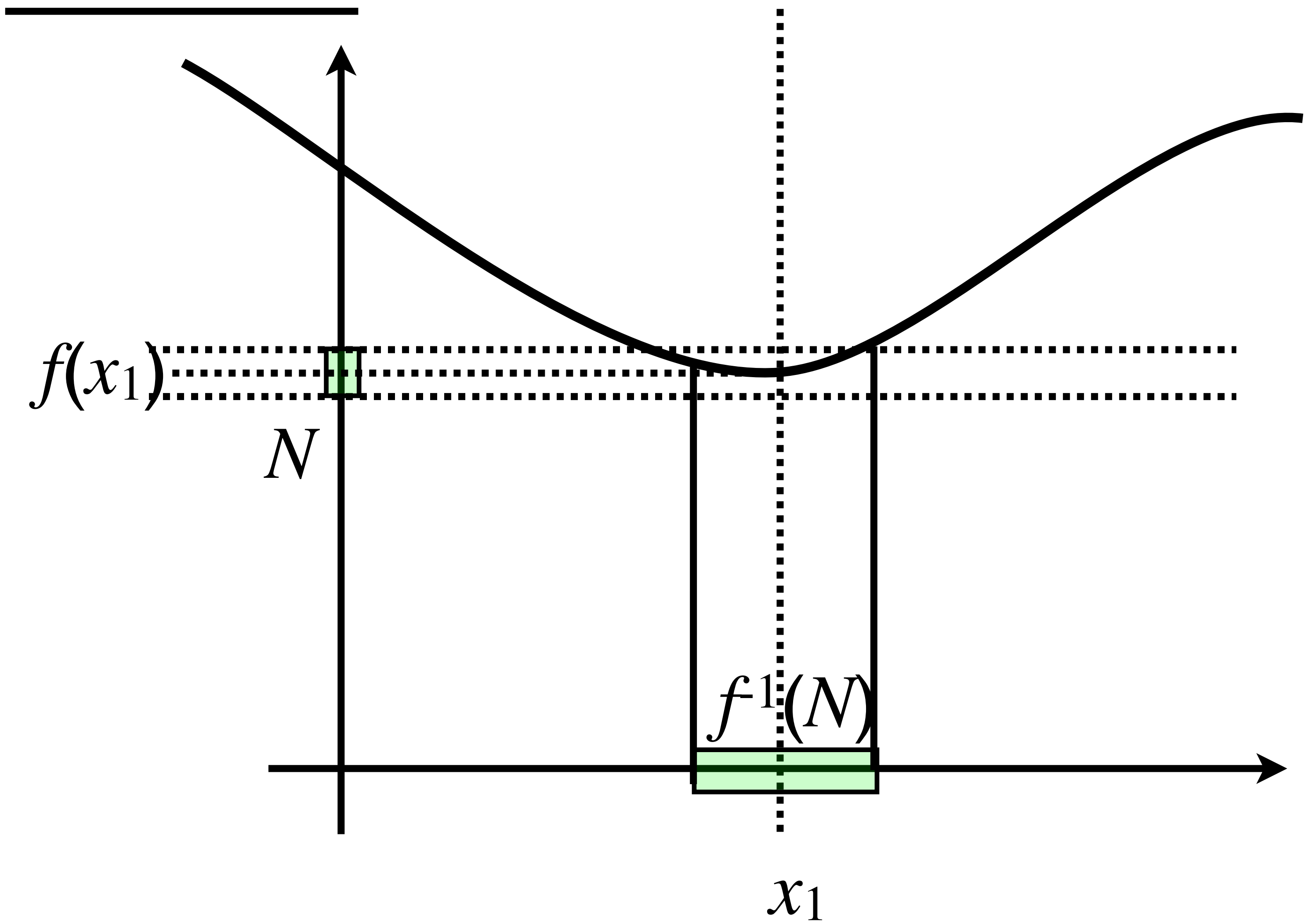


yの近傍をこの写像で戻すと？

これは近傍である

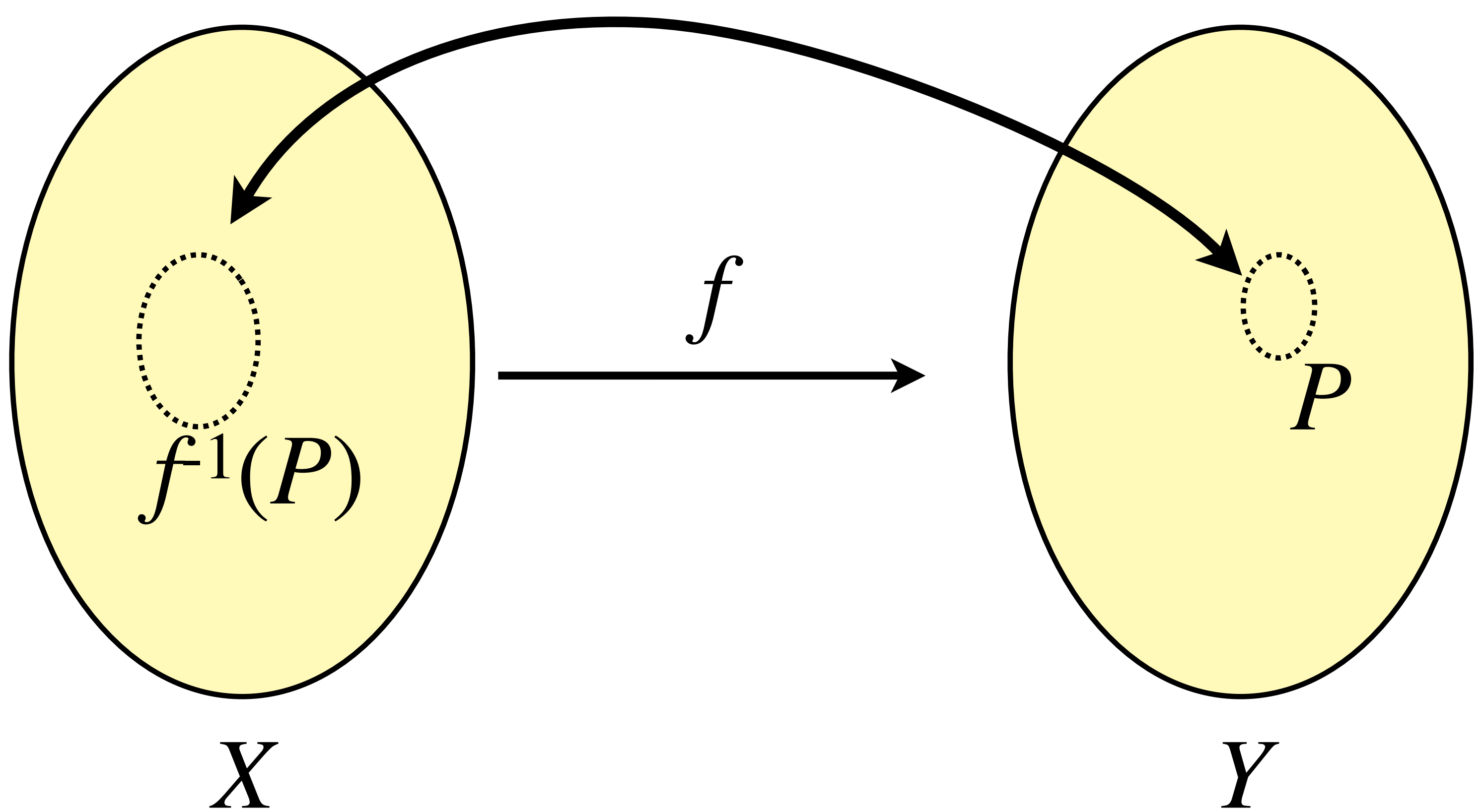
特定の点における連続の定義

- ある関数 $y = f(x)$ が $x = x_1$ で**連続**であるとは, $f(x_1)$の任意の近傍Nの原像$f^{-1}(N)$がx_1の近傍になっていることである.



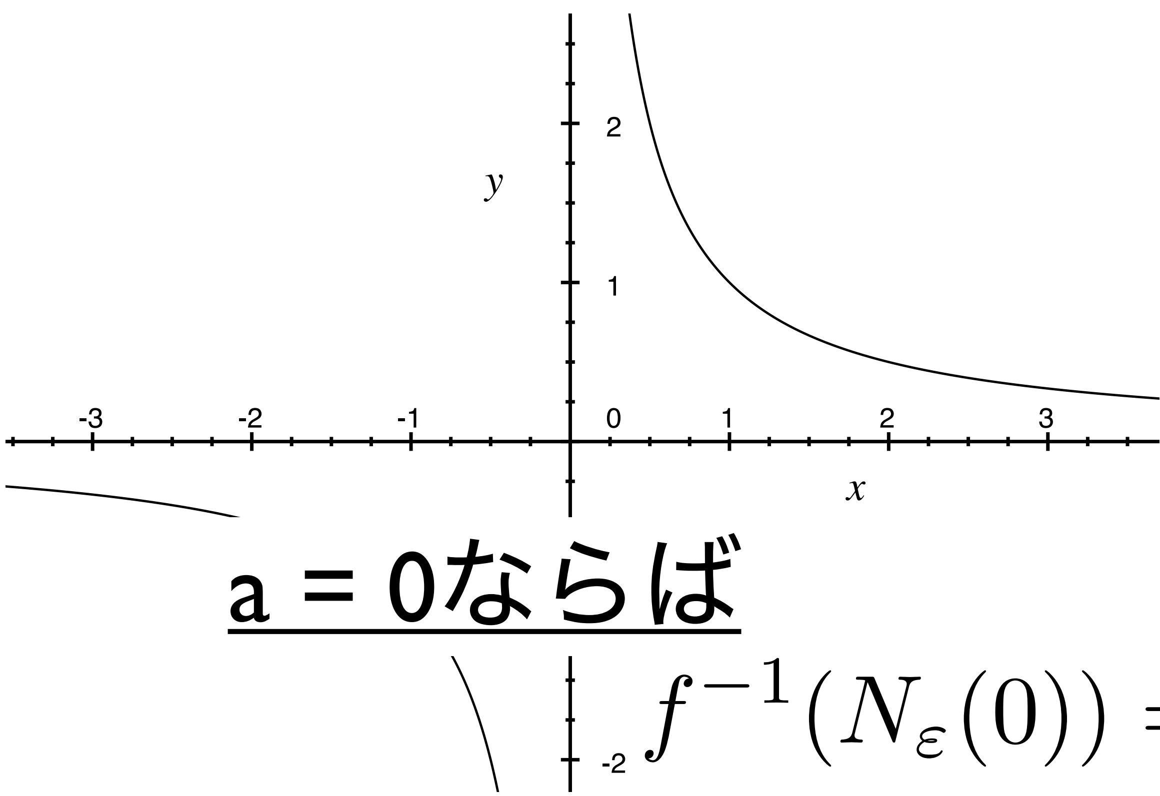
関数としての連続性

- X, Yが位相空間であるとして，ある関数f: $X \to Y$ が連続であるということはYの任意の開集合Pの原像$f^{-1}(P)$が開集合となることである.



反比例のグラフは連続関数にできるか？

- 反比例のグラフは連続ではない（と思える）.
- これは x = 0においてとる点が存在しないからである.



$$f(x) = \begin{cases} a & (x = 0) \\ 1/x & (x \neq 0) \end{cases}$$

と定義する

開集合ではない

a = 0ならば

$$f^{-1}(N_\varepsilon(0)) = \{0\} \cup \{x|x > 1/\varepsilon\} \cup \{x|x < -1/\varepsilon\}$$

a ≠ 0ならば

$$f^{-1}(N_\varepsilon(a)) = \{0\} \cup \{x|1/(a+\varepsilon) < x < 1/(a-\varepsilon)\}$$

数列が収束するとはどういうことか

- 数列が収束するということを普通,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

のように書く．もちろん普通の整数は∞を含まない．この式の意味するところはつぎのとおり：

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ \ \text{s.t. } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

極限を用いた連続の定義について (I)

- 普通の解析学では，ある数x_0において関数$f(x)$が連続であることをつぎのように定義する：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- このことを「ε-δ論法」で書くと，

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ \ \text{s.t.} \forall x[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \text{s.t.}\ \ f(N_\delta(x_0)) \subset N_\varepsilon(f(x_0))$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \text{s.t.}\ \ \underline{N_\delta(x_0)} \subset \underline{f^{-1}(N_\varepsilon(f(x_0)))}$$

xのδ近傍　　f(x)のε近傍の原像

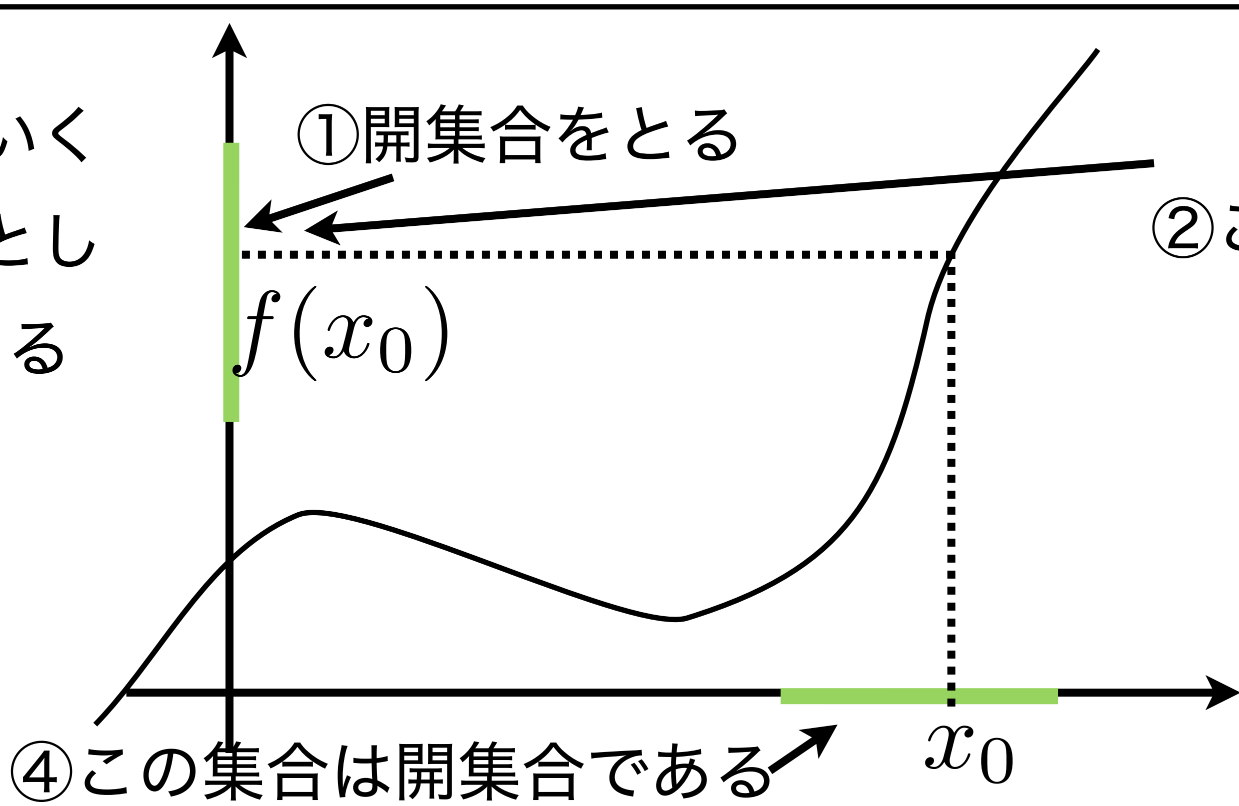
極限を用いた連続の定義について (2)

- 位相空間では任意の開集合の原像が開集合であれば連続であった．それは実数から実数への写像でも言える．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \text{ s.t. }\ \underline{N_\delta(x_0)} \subset \underline{f^{-1}(N_\varepsilon(f(x_0)))}$$

xのδ近傍　　f(x)のε近傍の原像

任意の開区間はいくつかの点の近傍として書くことができる



②この開集合の任意の点とその近傍を考える．

③その点yに至る点xが存在すれば，xの近傍でfによるyの近傍の原像に入るものがある．

位相空間における１点での連続性

- 位相空間において，ある点xで連続であるということは，f(x)の任意の近傍の原像がxの近傍になることである.
- 【復習】Pがxの近傍であるとは，P⊇Q⊇{x}となる開集合Qが存在することである.

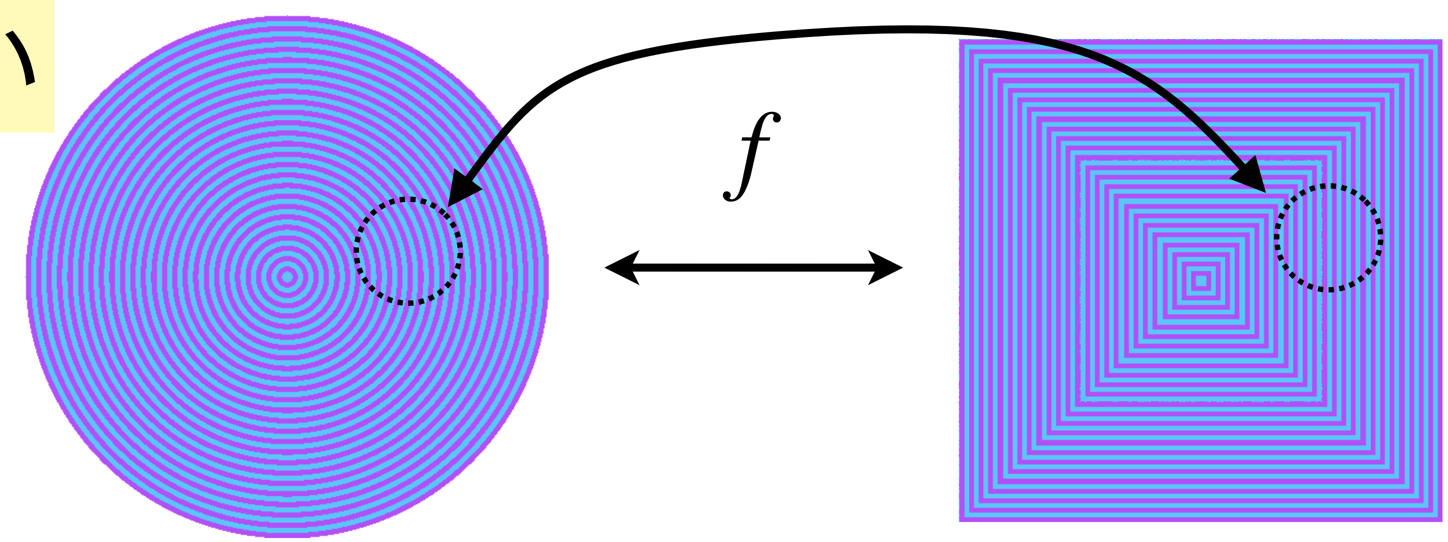
位相同形とは

- ２つの位相空間（図形）X, Yが位相同形であるとは，XからYへの写像 f が存在して，f, f^{1}が連続な１対１の写像であることである.

双方向連続

$$(x, y) \mapsto (X, Y)$$

飛びがない



$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \{(x, y) \mid |x|, |y| \leq 1\}$$

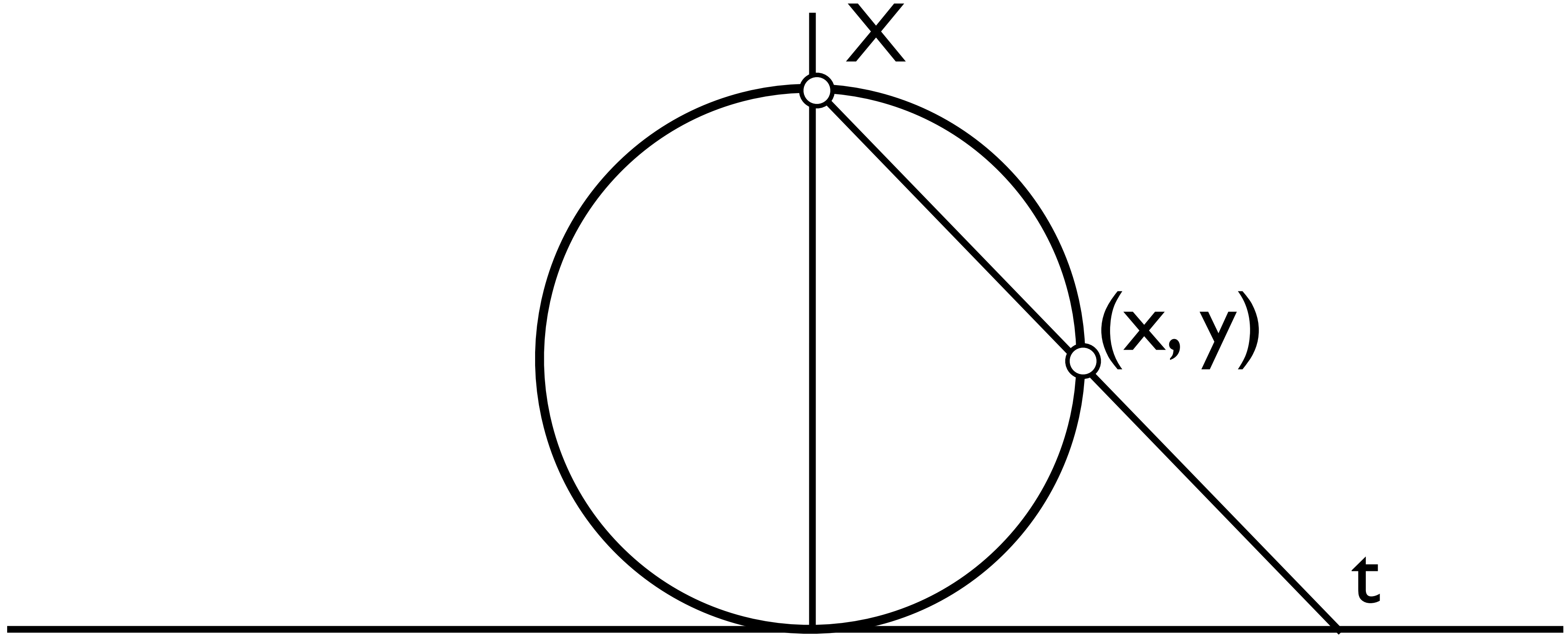
$$(X, Y) = \sqrt{x^2 + y^2)}(1, y/x)(y > x)$$

位相幾何学とは

- 位相幾何学とは位相同形な図形に共通する性質について研究する数学の一分野である.
- 位相同形な図形はすべて同じ図形であると考える.

実数軸と円環の対応

- 円環から実数軸への対応を考える

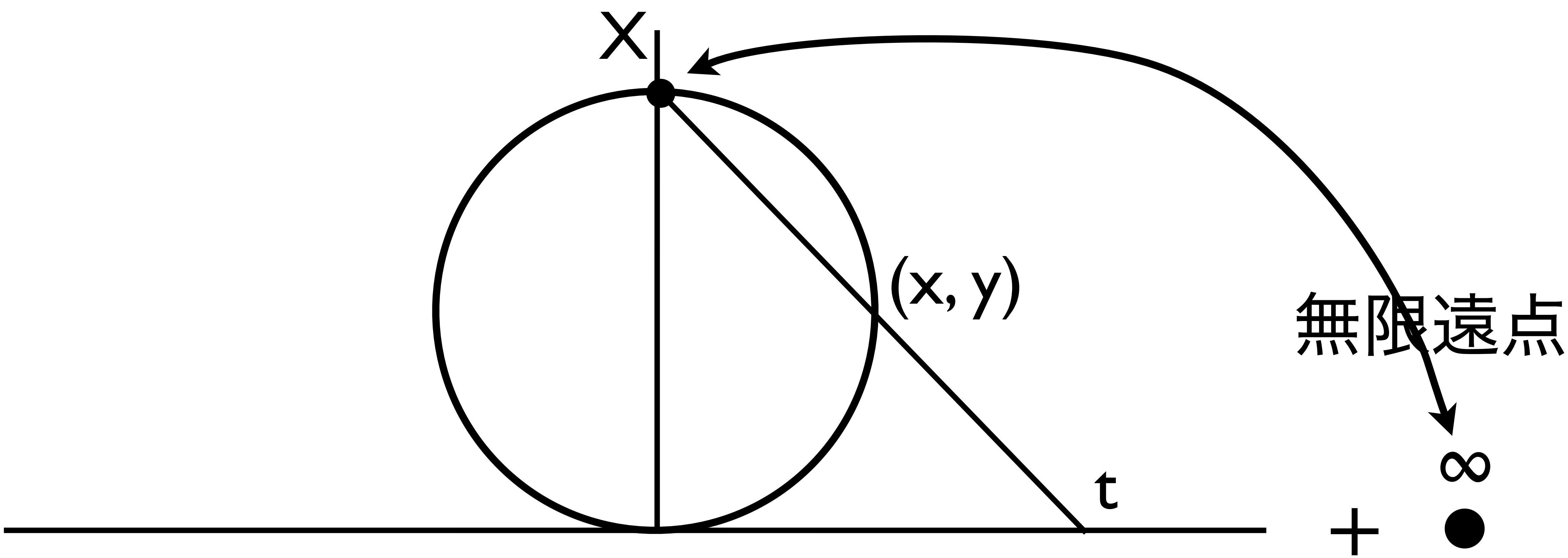


円環から一点Xを除いたものと実軸は１対１に対応させることができる．これは連続な対応か？

円環と実数軸を同相にするには

- 実数軸に点を付加して１対１写像を作る.
- 連続写像を定義できるように開集合を定める.

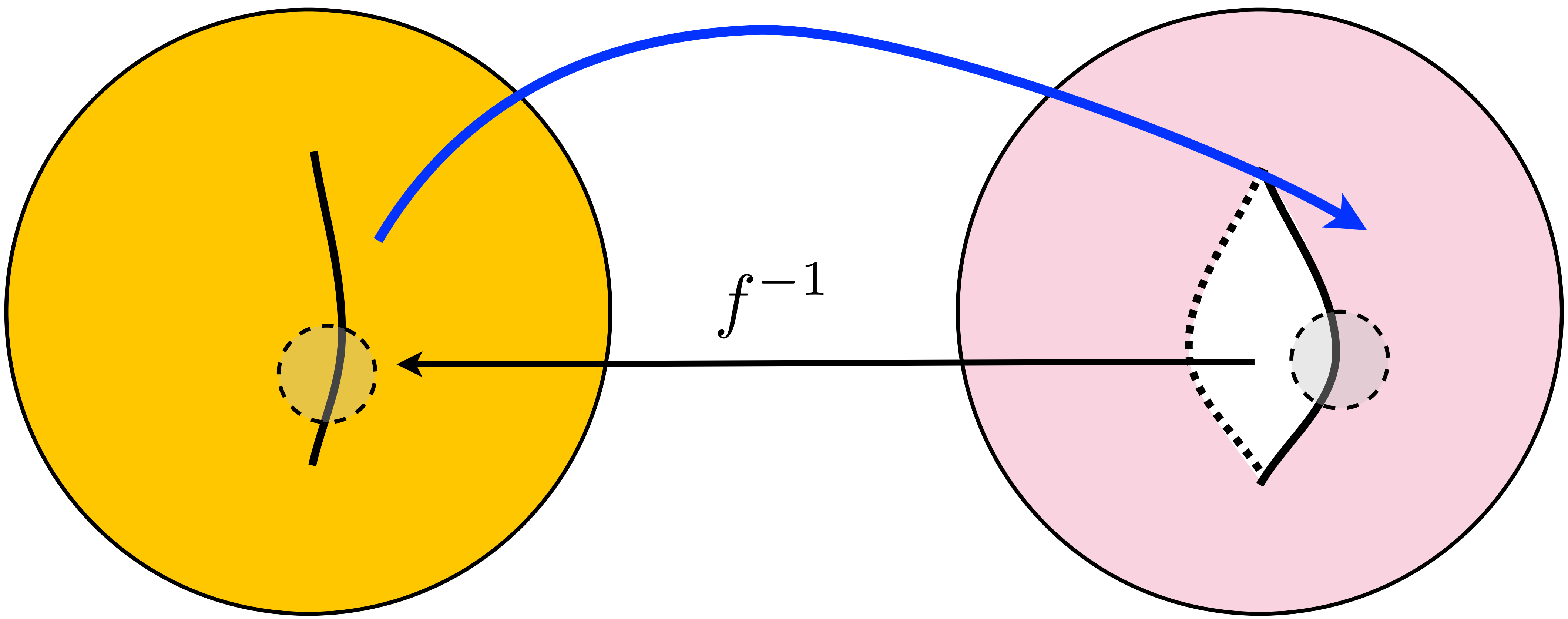
ステレオグラフィック写像



∞を含んで両脇に出てくるような区間も開区間であると考える

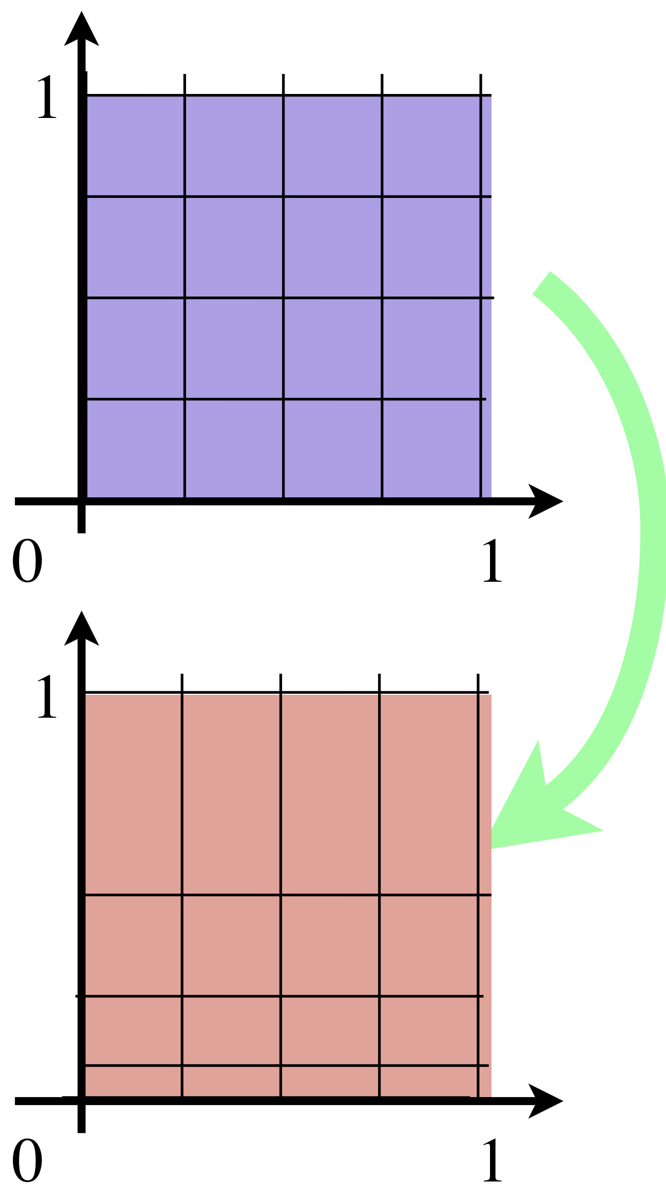
教科書の例

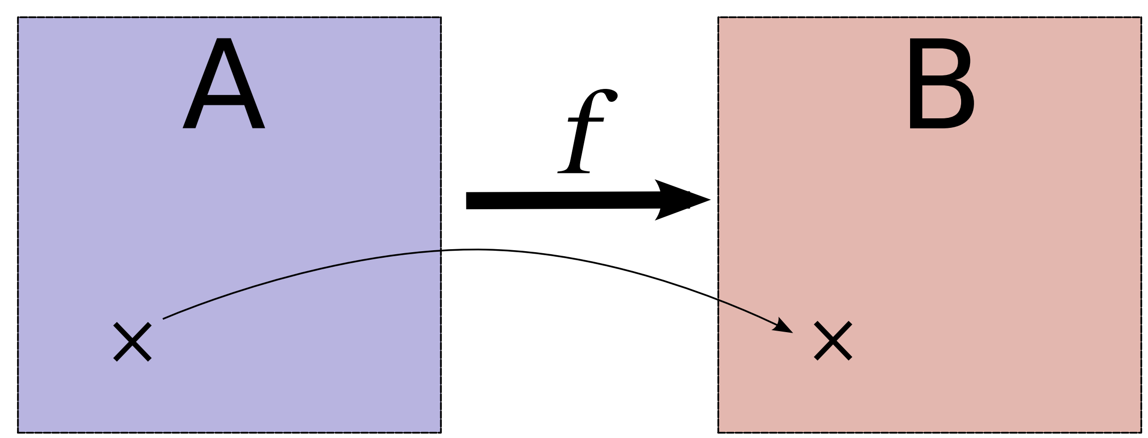
- 円盤から裂けた円盤への写像



穴のあいた矩形と穴があいていない矩形(I)

- 直感的に言えば，穴があいていれば位相同形ではない.





$$g(x,y) = (x, y^2), \quad (0 \le x, y \le 1)$$

このような写像で対応させても連続写像となる

穴のあいた矩形と穴があいていない矩形(2)

- B’に穴が空いている場合には工夫しても連続写像にできない.

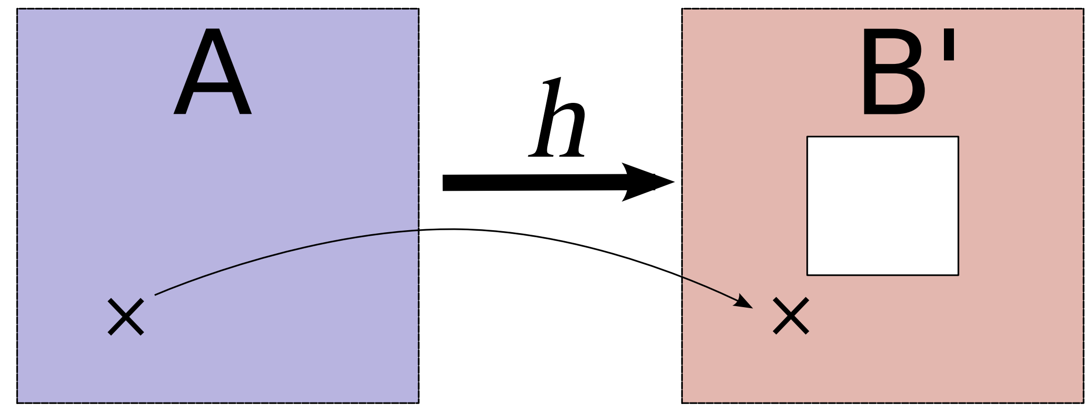


図 4.4: 正方形から穴の空いた正方形への恒等写像

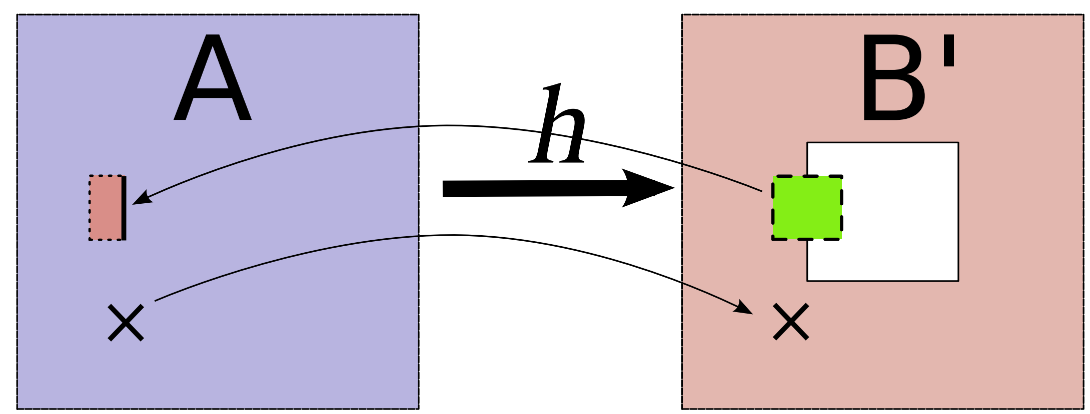


図 4.5: 正方形から穴の空いた正方形への恒等写像, ある領域とその原像

たとえば,

$$h(x,y) = \begin{cases} (0.75, y) & (0.25 < x < 0.75 \text{ かつ } 0.25 < y < 0.75) \\ (x,y) & (\text{その他}) \end{cases} \tag{4.10}$$

連続でない

穴のあいた矩形と穴があいていない矩形(3)

- B'に穴が空いている場合には工夫しても連続写像にできない.

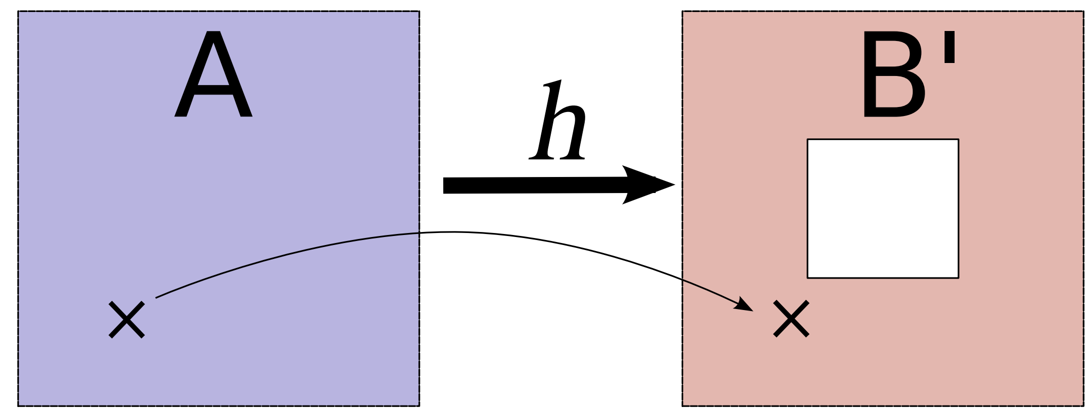


図 4.4: 正方形から穴の空いた正方形への恒等写像

- １対１の対応を確保するために穴の片側の境界を含める

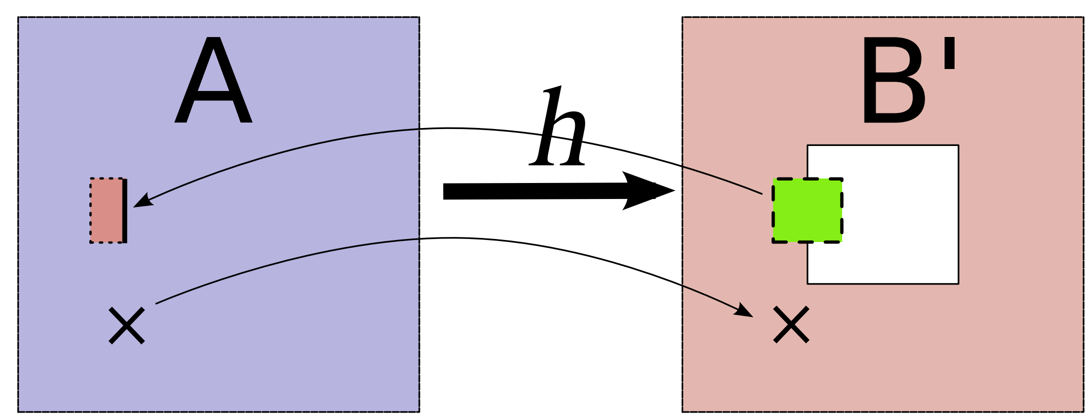
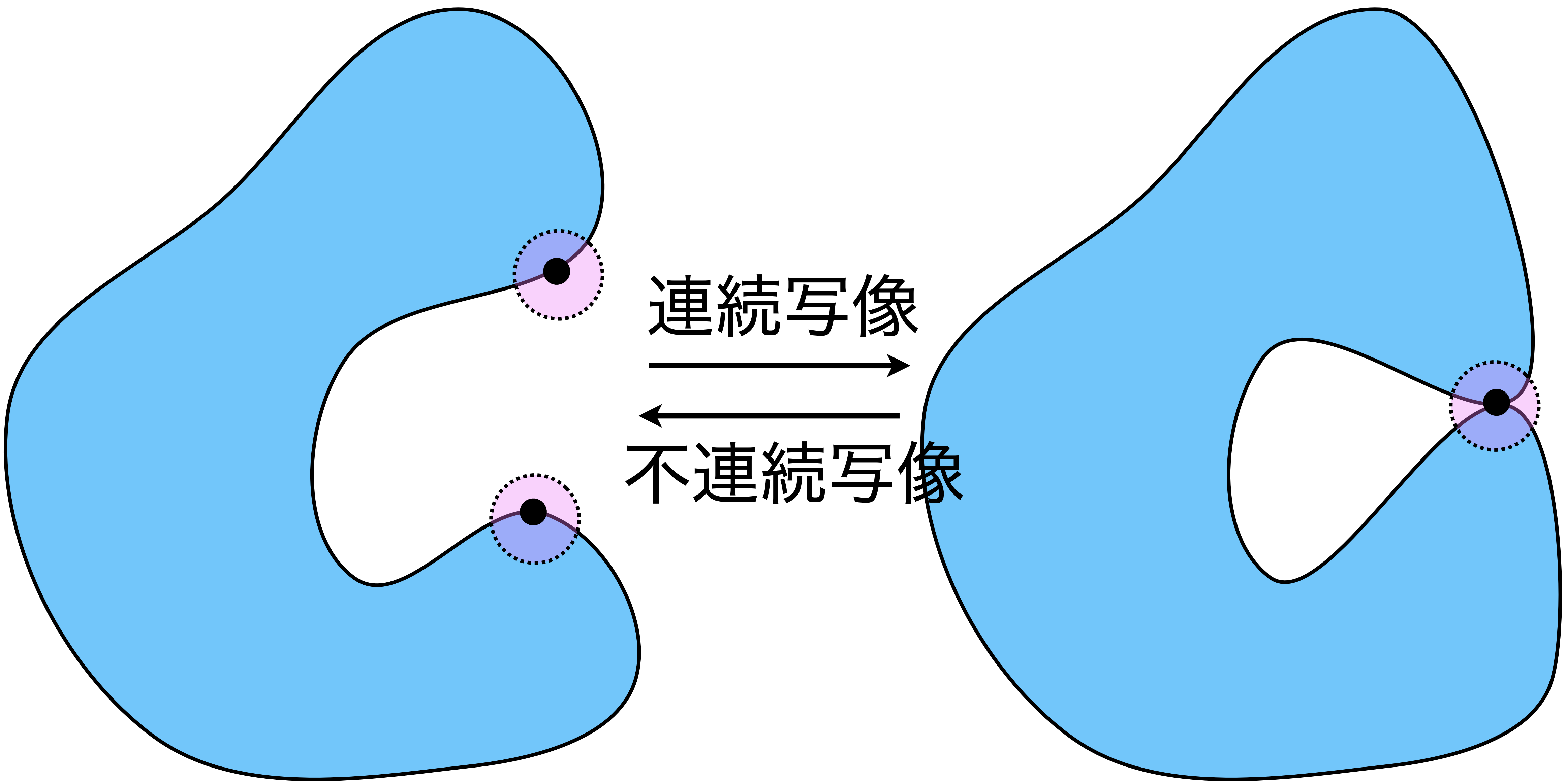


図 4.5: 正方形から穴の空いた正方形への恒等写像, ある領域とその原像

$$h'(x,y) = \begin{cases} (x,y) & y < 0.25 \quad \mathrm{or} \quad y > 0.75 \\ (x/2,y) & (x \leq 0.5) \\ ((x-0.5)/2+0.75,y) & (x > 0.5) \end{cases}$$

もう一つの不連続の例



位相不変量

- 位相不変量とは，ある図形Xから計算される量m(X)のことで，

  X とYが位相同形 $\Rightarrow$ $m(X) = m(Y)$

  となるmのことである．

- 注意しなければならないのは逆が成り立たないことである．逆が成り立つ場合，**完全位相不変量**という．このようなものは見つかっていない．

オイラー数は位相不変量

- 第2回の講義で取り上げたオイラー数は位相不変量である．すなわち，位相同形な図形についてオイラー数を計算すると，同じ値になる．**ただし，オイラー数が同じだからといって，位相同形であるとは言えない．**

よく知られた位相不変量

- ポアンカレの基本群
- （ホモロジー群）
- （ベッチ数）

これらは群であるので,
単純な数ではない.