幾何学入門第12回
じわじわと動かすーホモトピーー

山本修身
名城大学理工学部情報工学科

本日の内容

- 単体分割の考え方について学ぶ.
- 与えられた図形の内部で，ある地点から別の地点へ移動する経路について考える.
- 経路の取り方は無数にあるが，２つの経路の間に同値関係を考える.

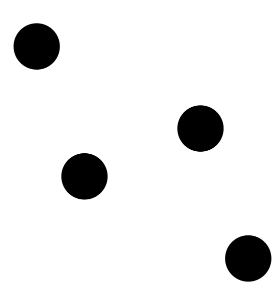
扱う図形をもっとシンプルにしたい

もっと
オートマチックに基本群を計算
できないか？

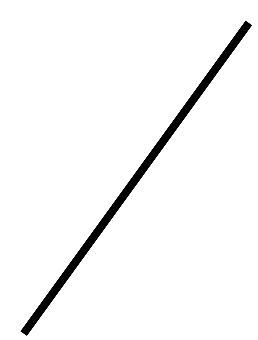
- ここで考えることは扱う図形をもっとシンプルにすることである.
- 図形の形には色々あるが，多少変形させても位相的な性質は変わらない．もっと本質的なところで図形を形式化したい.

扱う図形の基本形を制限する

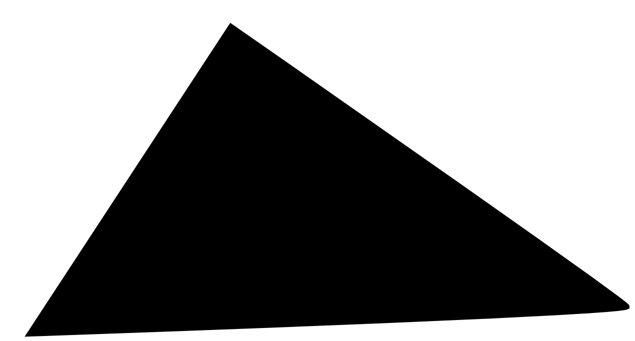
- 扱う図形をあらゆる位相空間ではなく，単体の組み合わせによって与えられるものとする.



点



線分



三角形

単体の定義ー凸結合ー(I)

- n次元空間のm個の点を用いて，つぎのような図形を考える.

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

この図形は, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を通る図形である

この図形のことを，これらの点で作られる凸結合と呼ぶ.

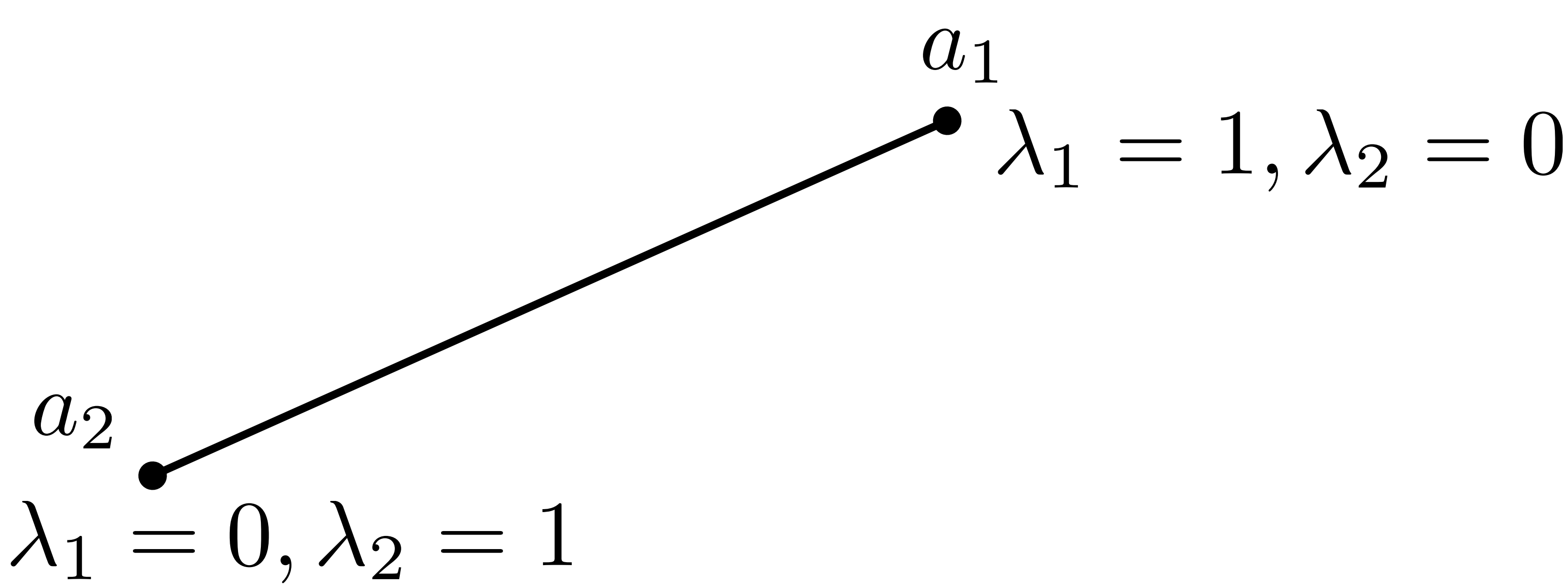
単体の定義ー凸結合ー(2)

- ここで，変数 λ_i がすべて正である場合を考える.

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

- m=2ならば，２つの点を結ぶ線分を表す.

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

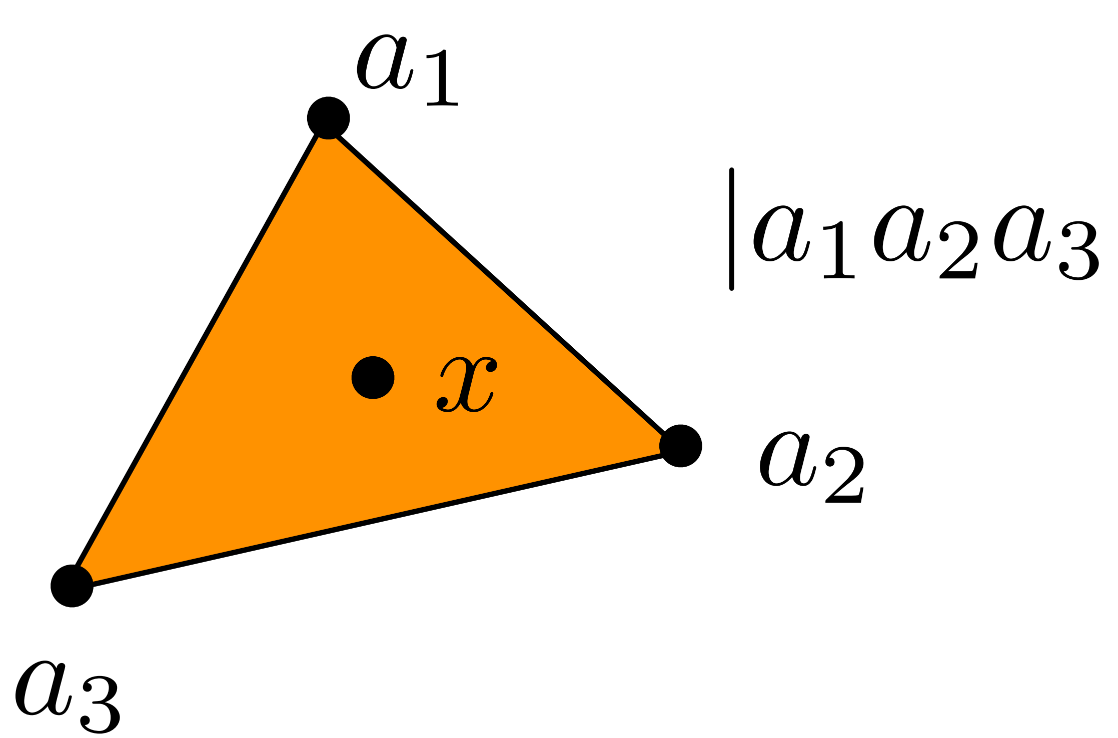


単体の定義ー凸結合ー(3)

- 一般に単体とは,

$$S_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \;\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m) \right\}$$

m-1次元単体



単体の面とは

- 単体の面 (face) とは，単体を定義する点の中からいくつかを選択した点によって構成される単体のことである.

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

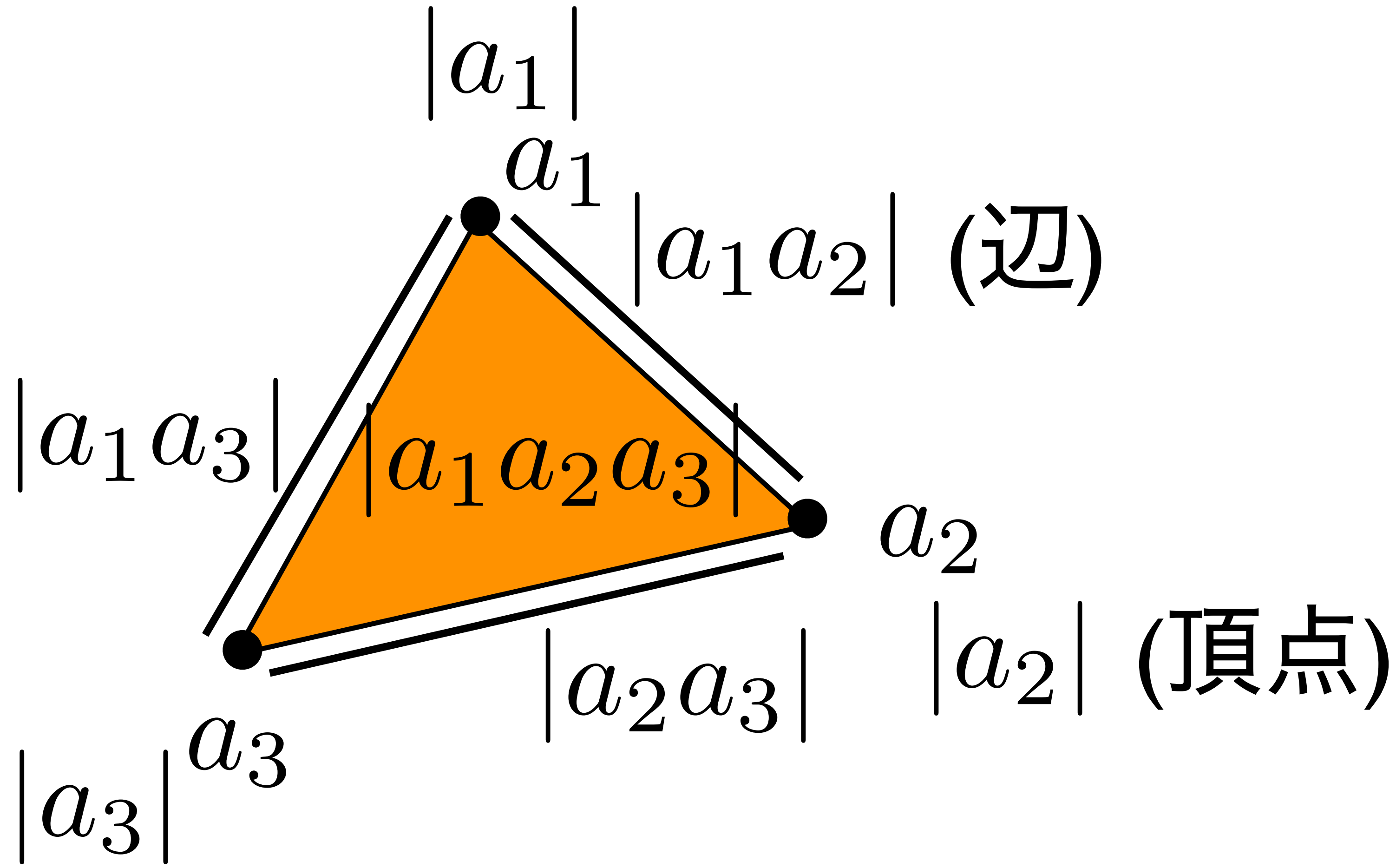
$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_s}, (s < m)$$

$$\left| a_{j_1} \cdots a_{j_s} \right|$$

いくつかの点を除いたものの凸結合

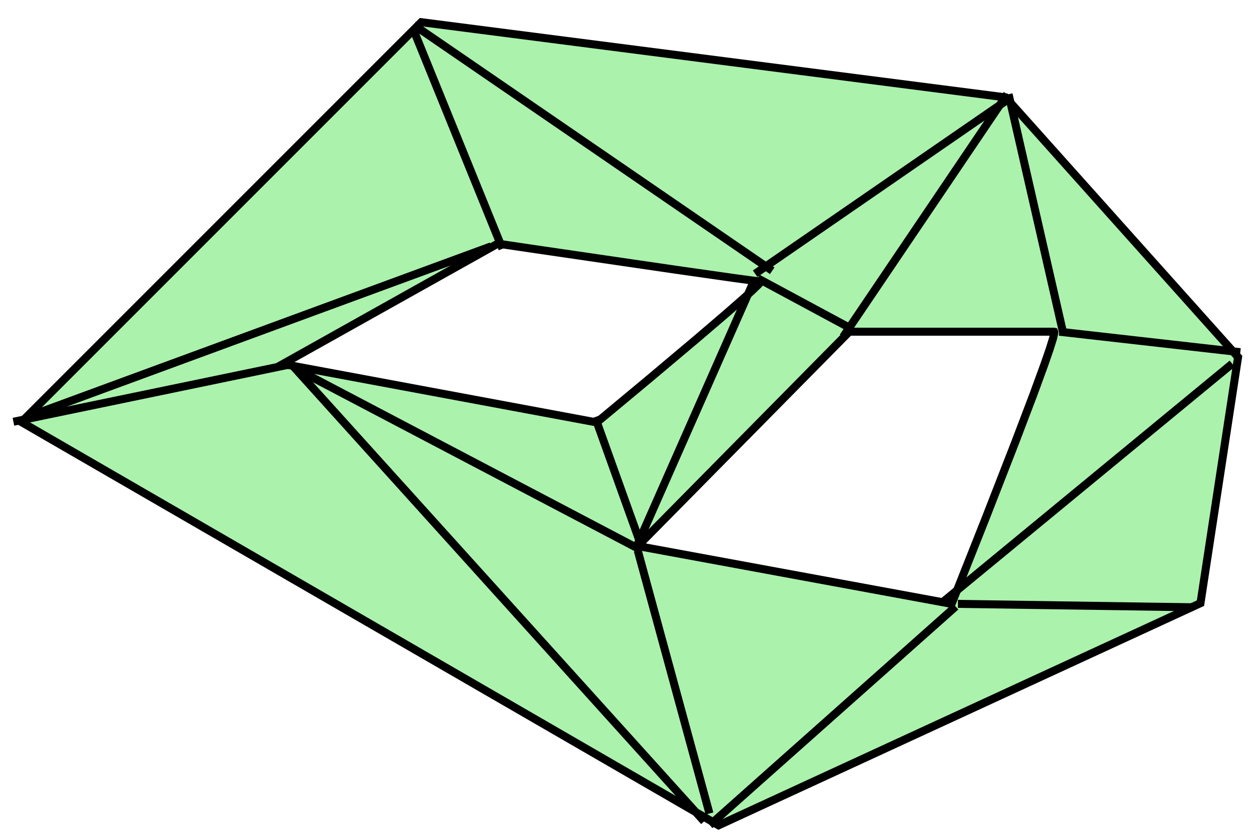
単体の面の例

- 三角形の面はつぎのようになる.



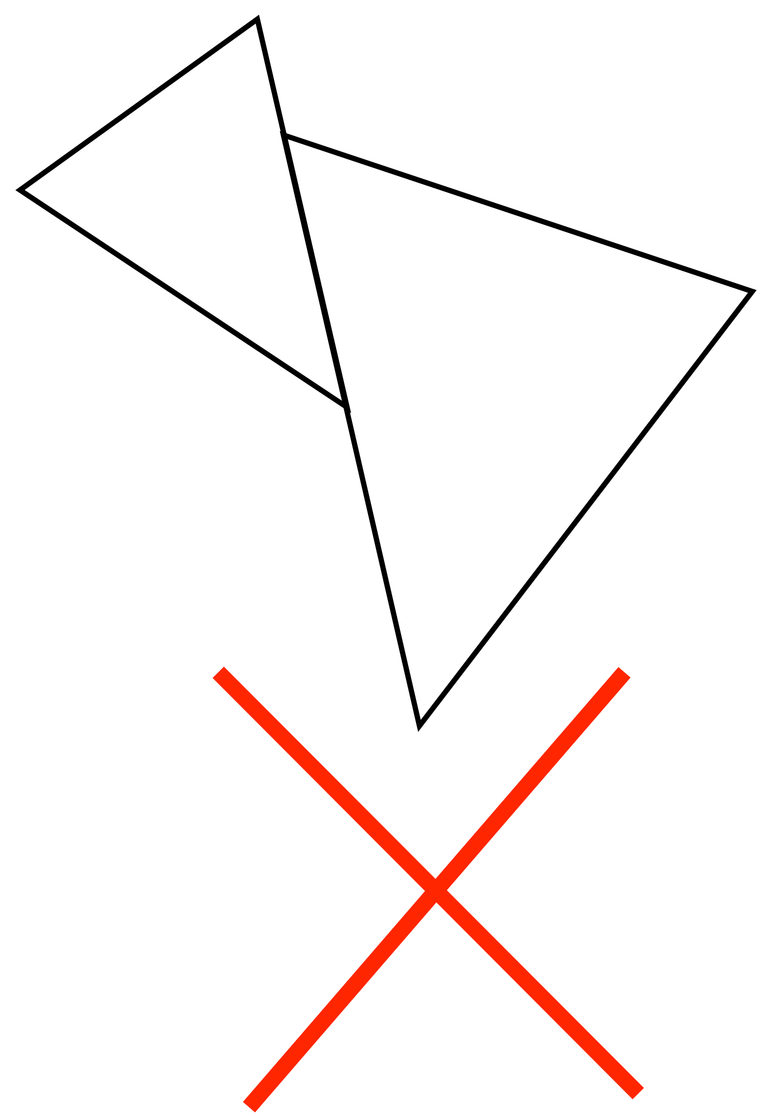
単体を組み合わせて複体を作る（1）

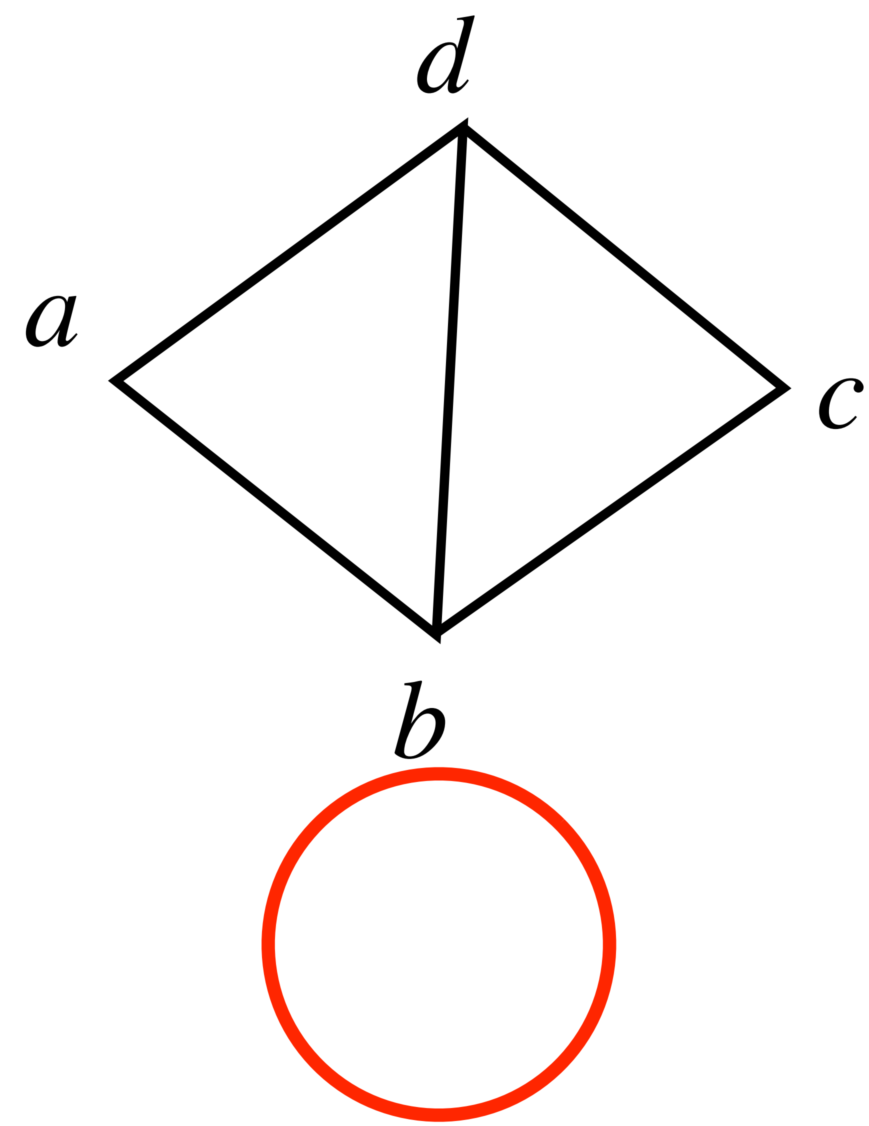
- これまで対象としてきた図形は一般的な位相空間であったが，ここではもっと単純な単体を結びつけた図形とする．



単体を組み合わせて複体を作る（2）

- 単体の正しい組み合わせ方は？





単体を組み合わせて複体を作る（3）

- 複体の厳密な定義

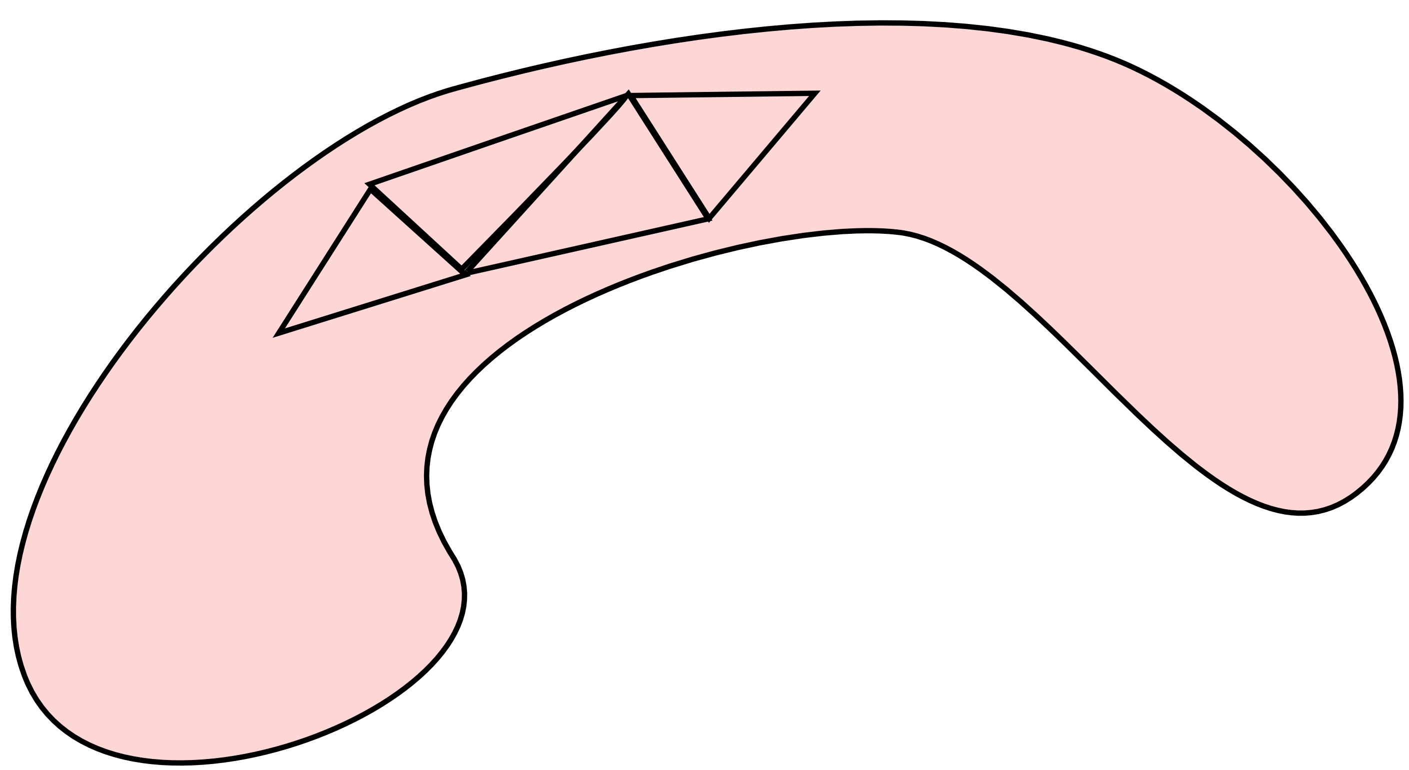
A **simplicial complex** $\mathcal{K}$ is a set of simplices that satisfies the following conditions:

1. Any face of a simplex from $\mathcal{K}$ is also in $\mathcal{K}$.
2. The intersection of any two simplices $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ is a face of both σ_1 and σ_2.

$$K = \{|a|, |b|, |c|, |d|, |ab|, |bc|, |cd|, |da|, |db|, |abd|, |bcd|\}$$

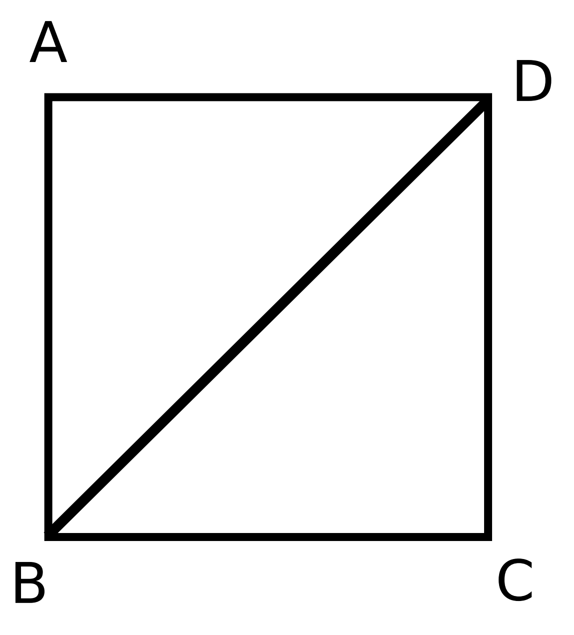
単体分割，単体近似

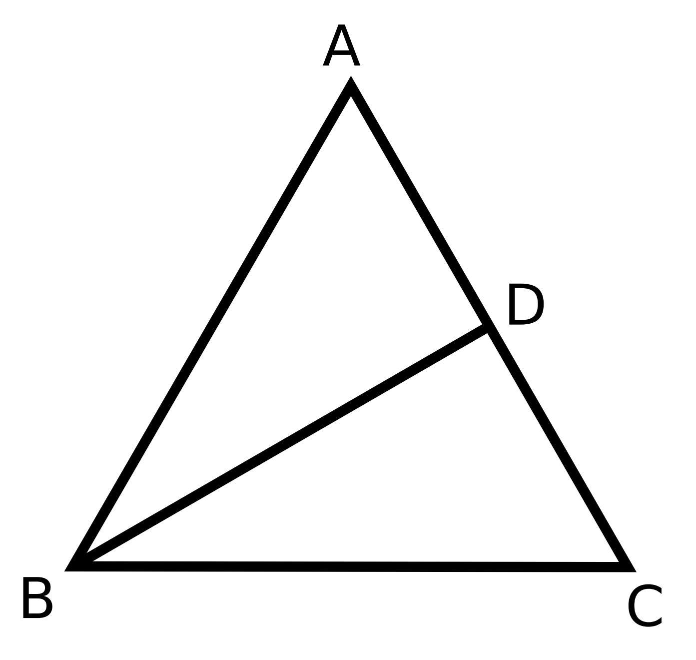
- これからやりたいこと：与えられた図形と位相同形な複体（位相的性質が同一）を作ってその複体の性質を解析する.



単体分割を用いた同形性の証明

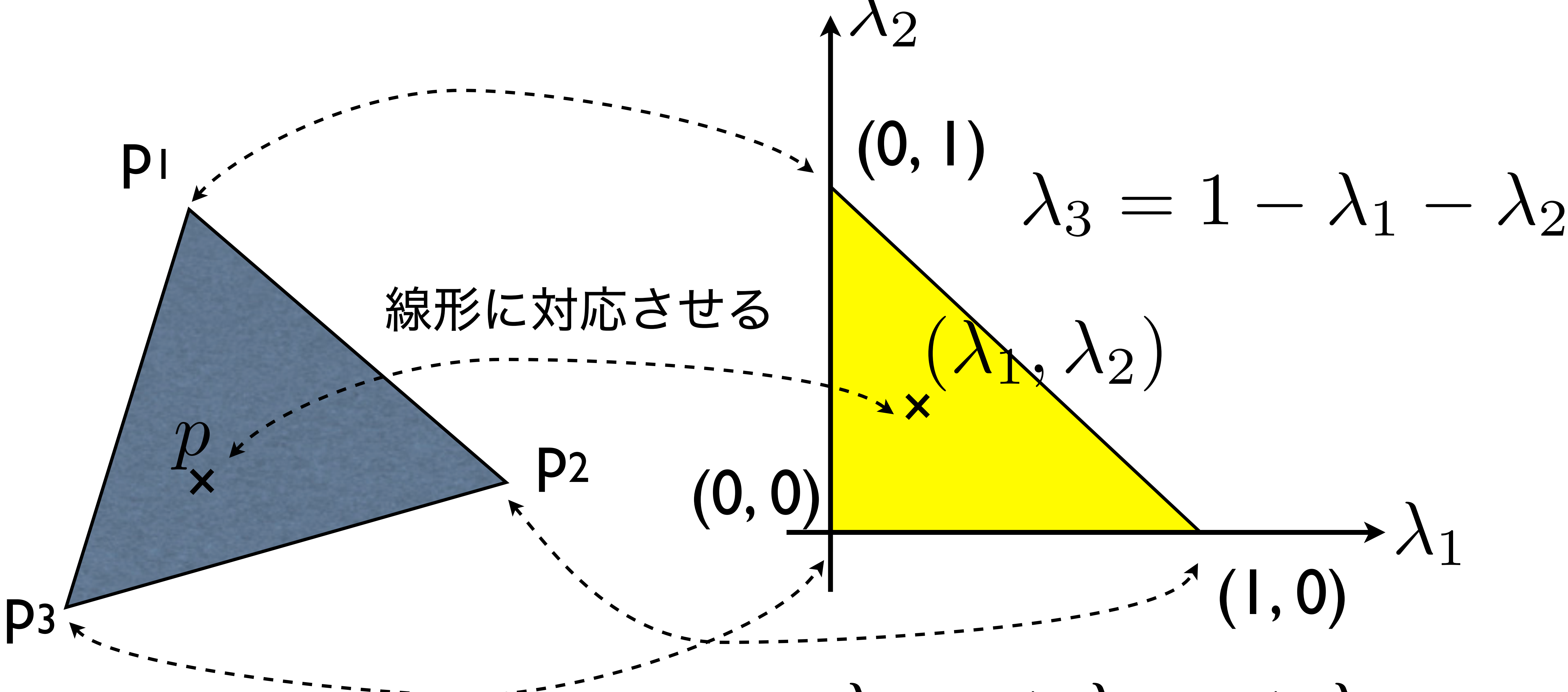
- ２つの図形を単体分割して，それぞれの単体を対応づけることによって，２つの図形が位相同形であることを証明することができる.





三角形どうしを対応づける(1)

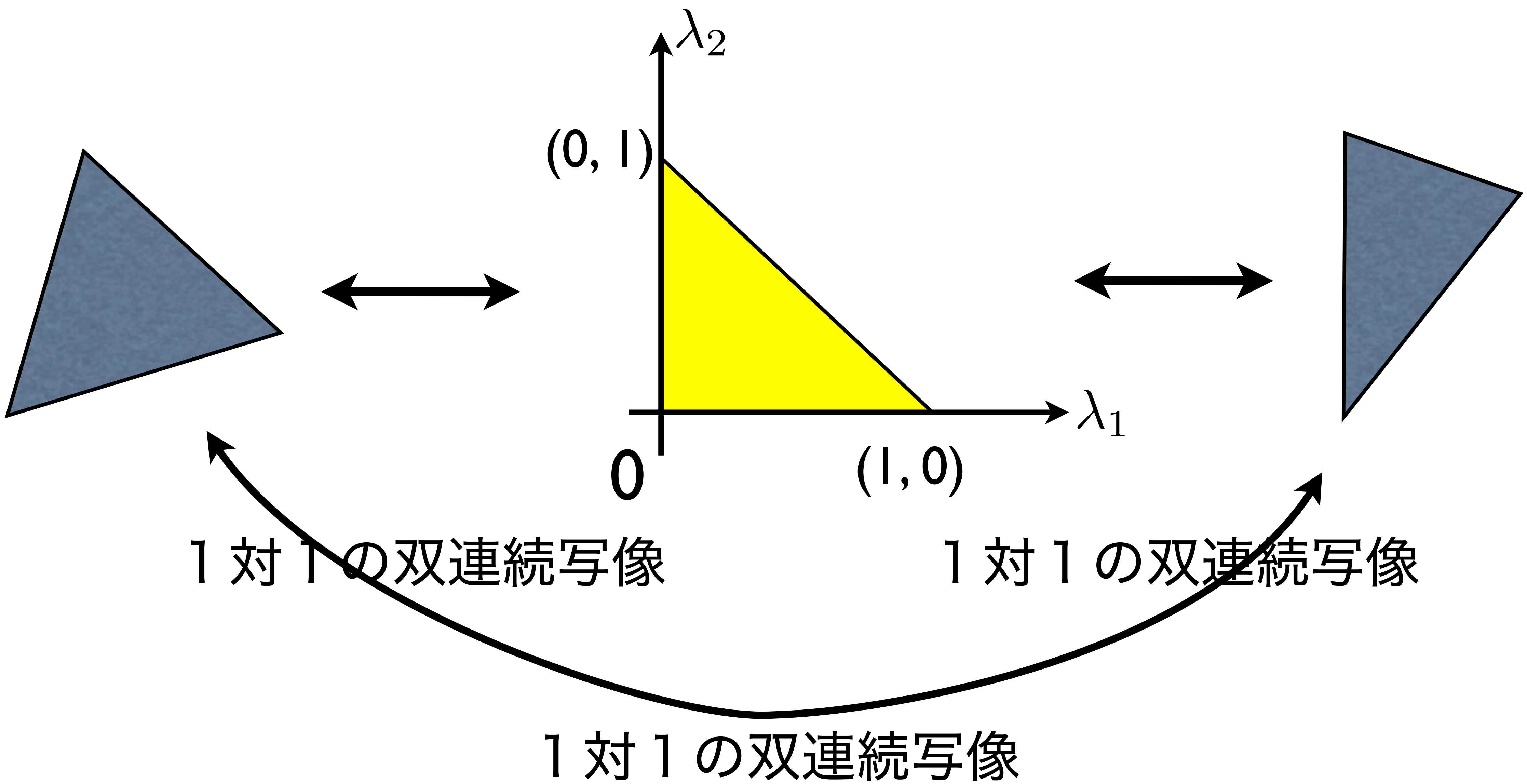
- 任意の三角形の内部と２次元の直角三角形の領域を１対１に対応させる.



$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$$

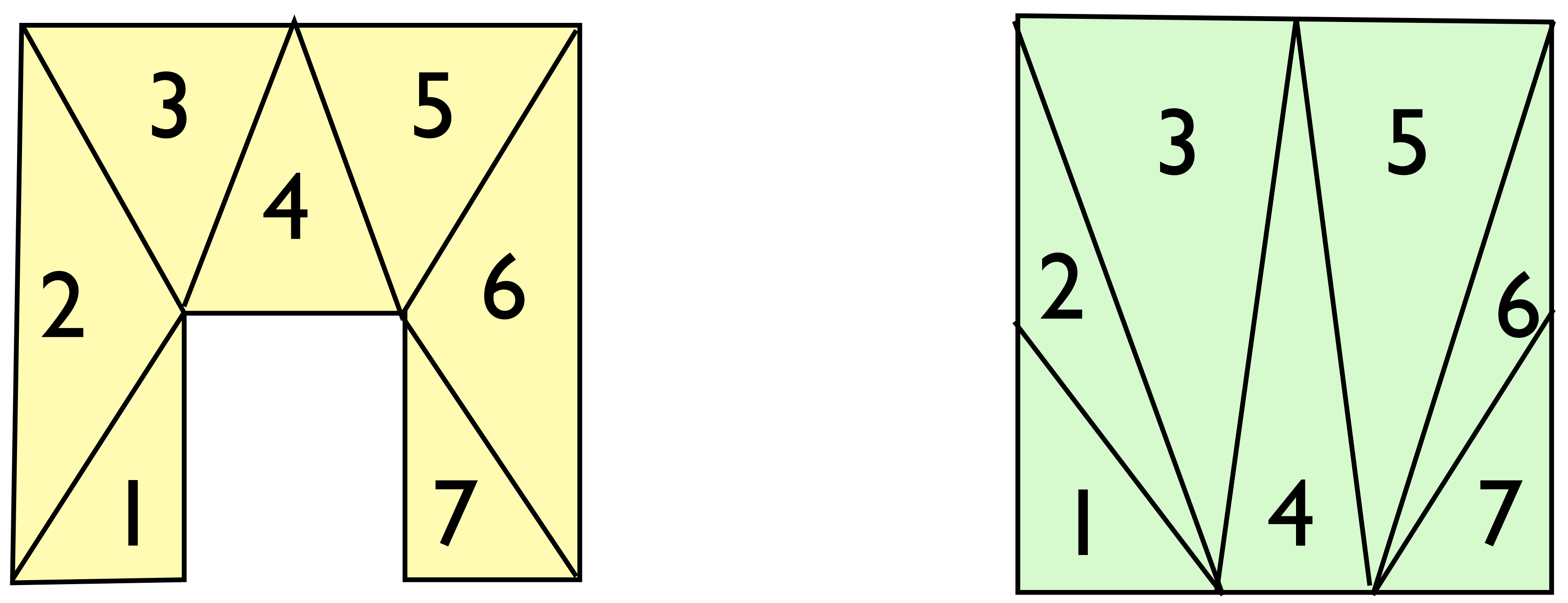
三角形どうしを対応づける(2)

- ２つの三角形の領域を対応づける

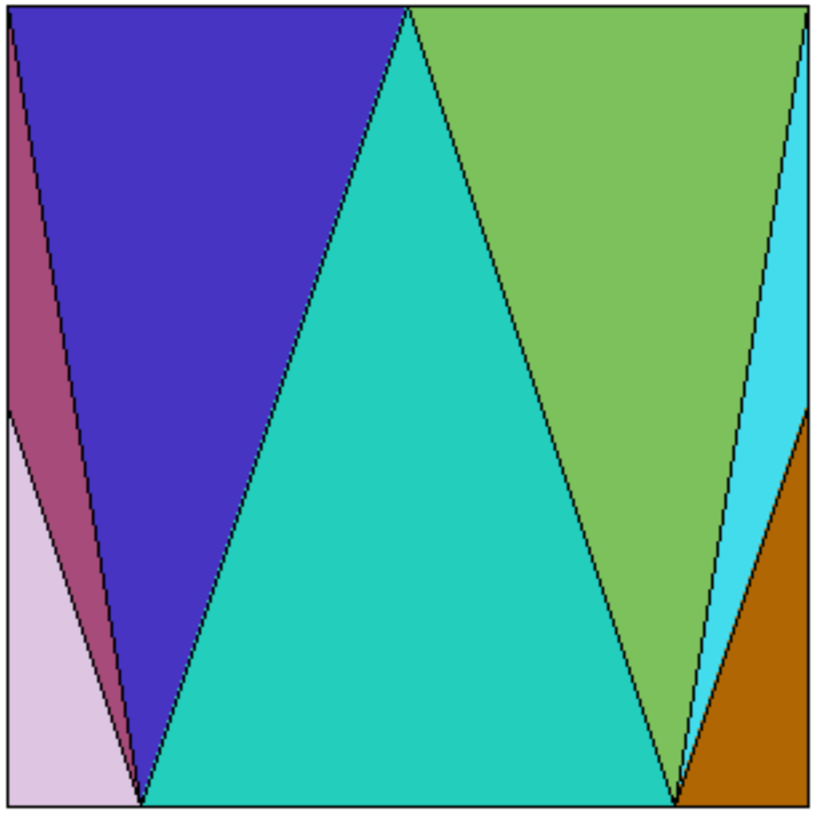


２つの図形の同形性を示す(1)

- 図形の三角形分割と対応する三角形どうしの**1対1対応**を示すことによって，同形性を示すことができる

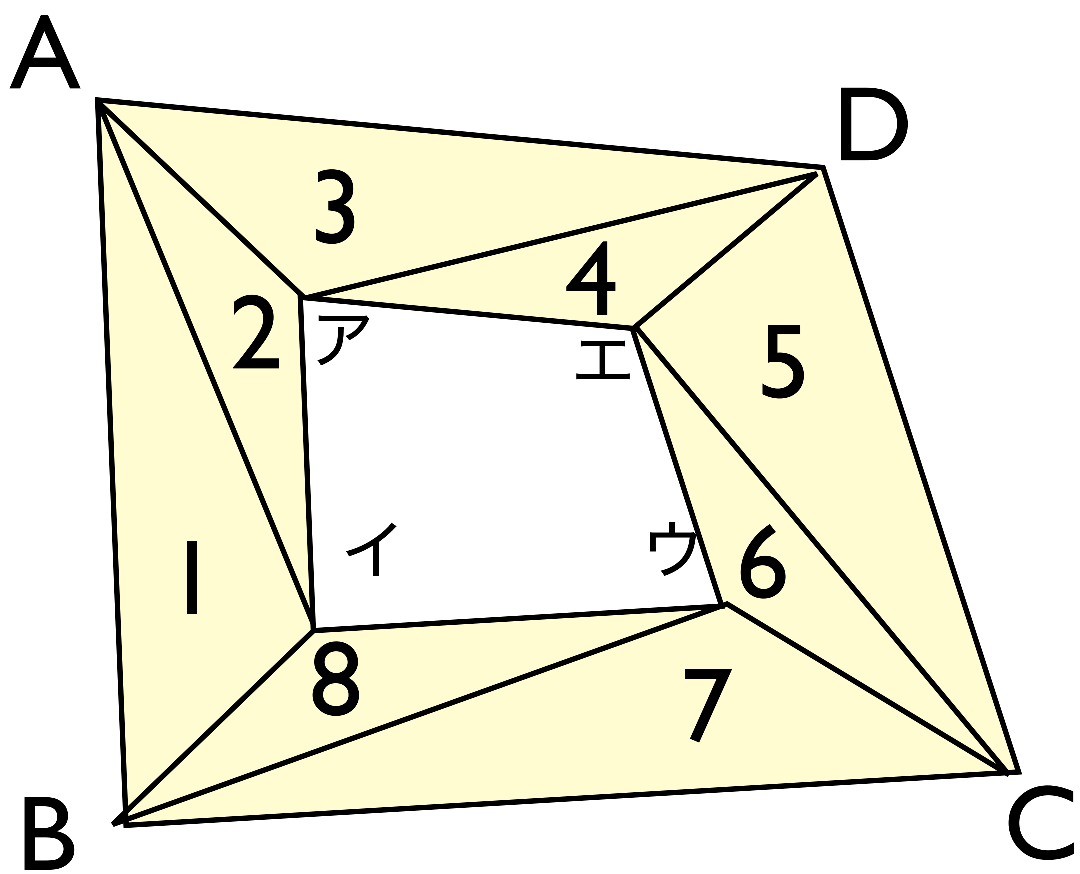


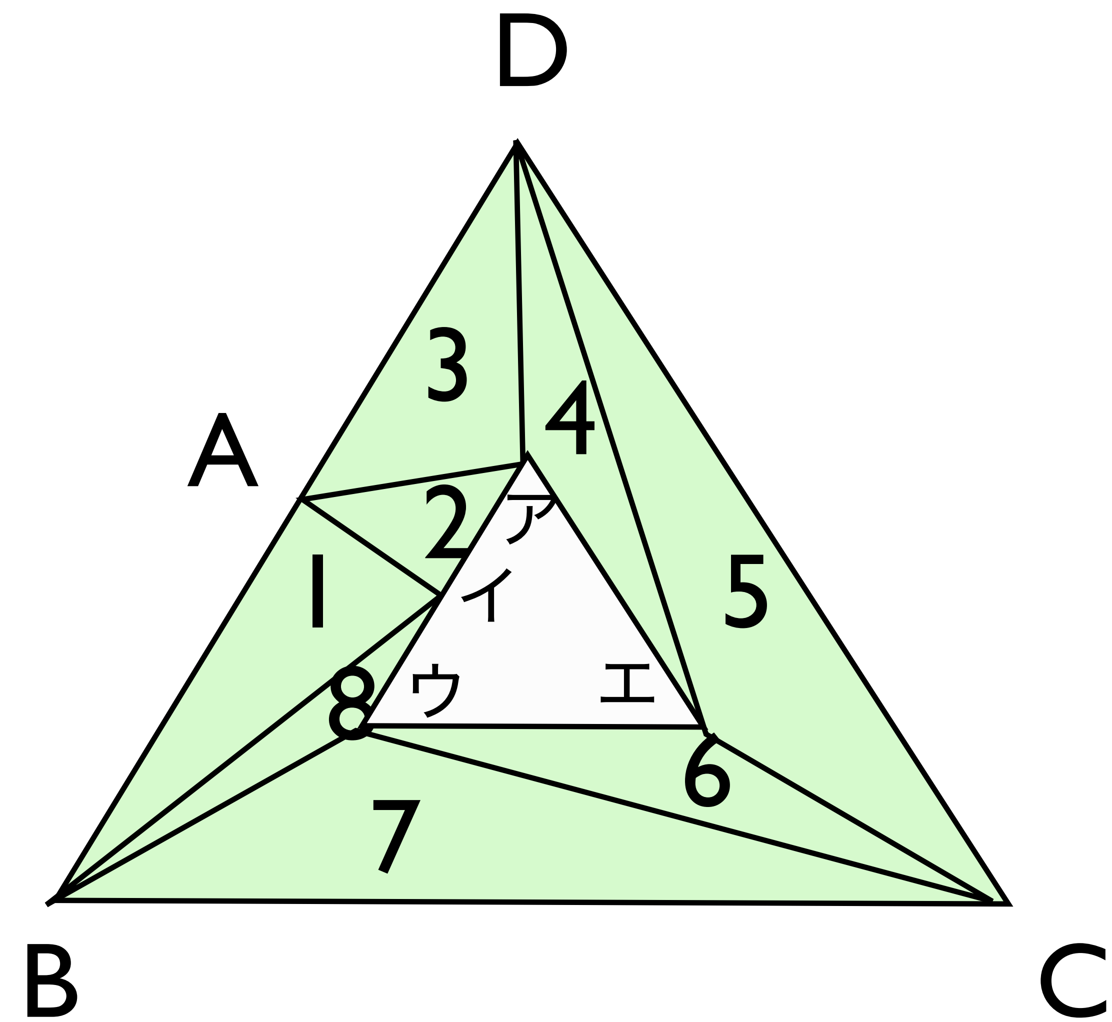
２つの図形の同形性を示す(I)（動画）



２つの図形の同形性を示す(2)

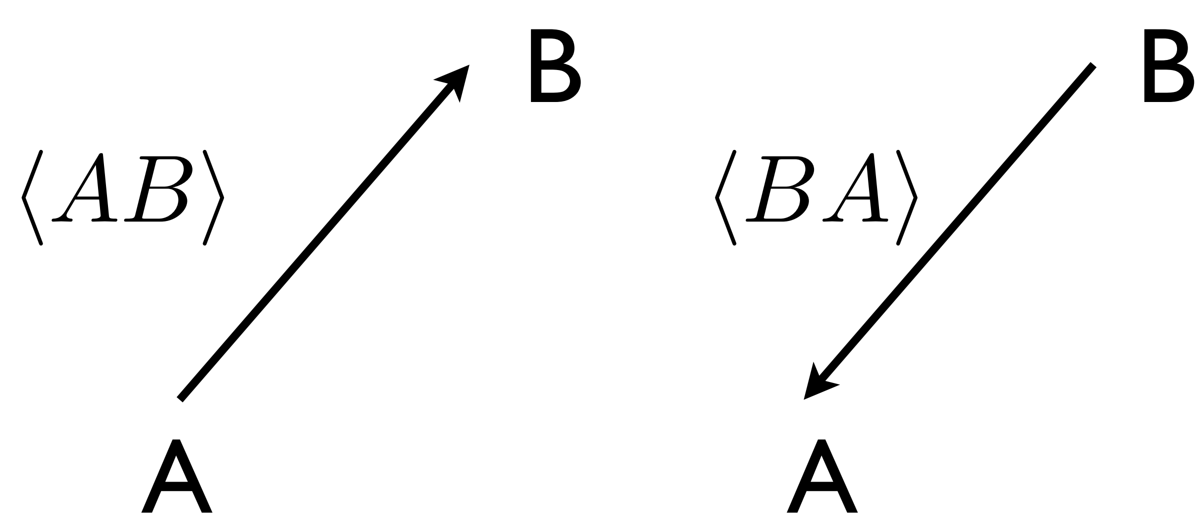
- もう一つの例.





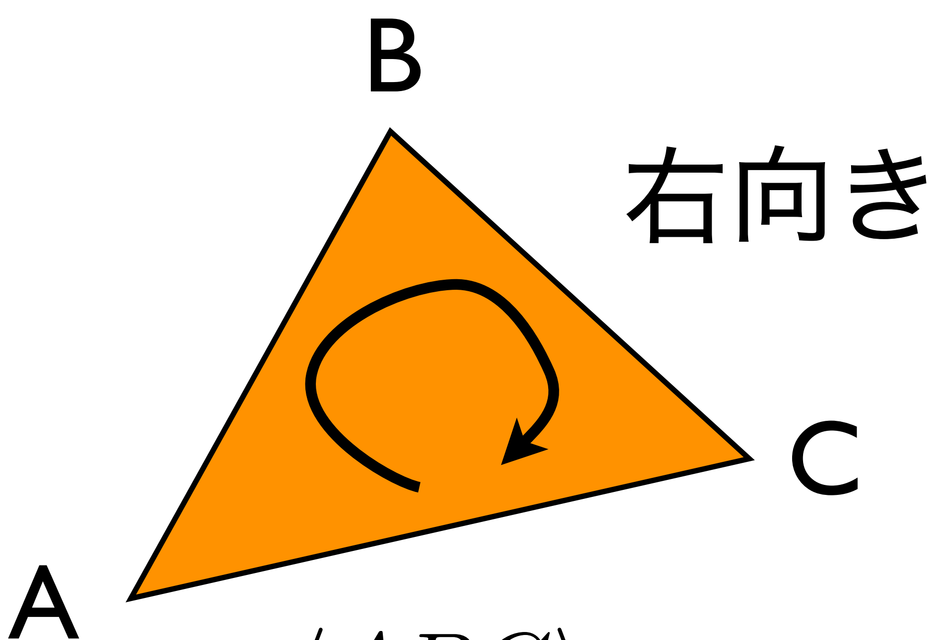
単体の向きづけ

- ここまで，単体は単純に点の組み合わせとして表現されているが，さらに「向き」をつけることにより扱いやすくなる．
- 例えば線分には２つの向きがある．２つは順番が異なる．



単体の向きづけ -三角形の場合-

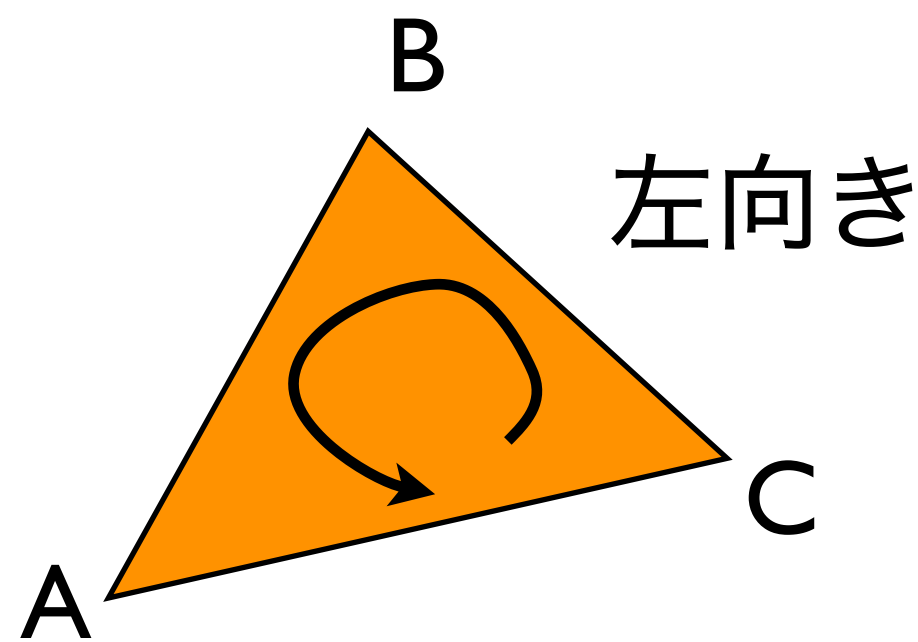
- ２次元単体（三角形）の向きも２種類ある



$\langle ABC \rangle$

$\langle BCA \rangle$

$\langle CAB \rangle$



$\langle CBA \rangle$

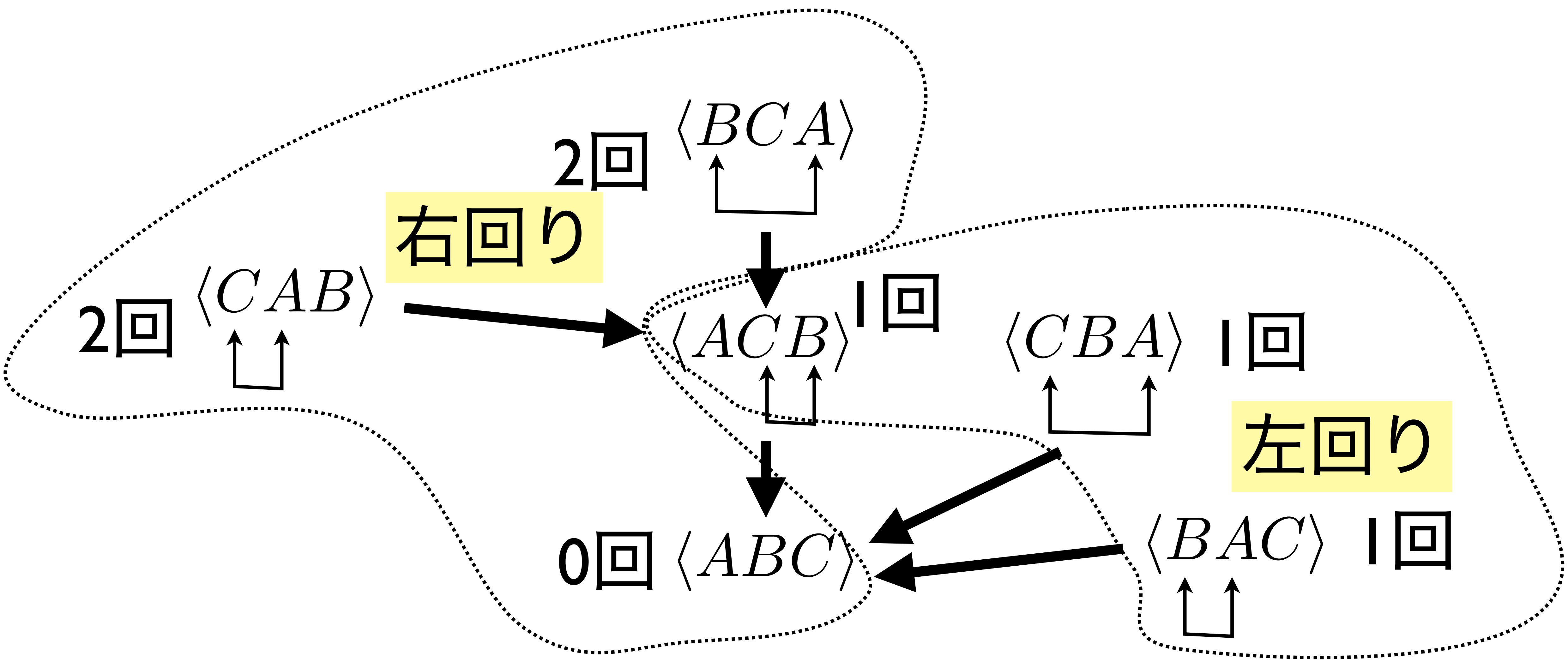
$\langle BAC \rangle$

$\langle ACB \rangle$

それぞれの向きに
３つの表現がある

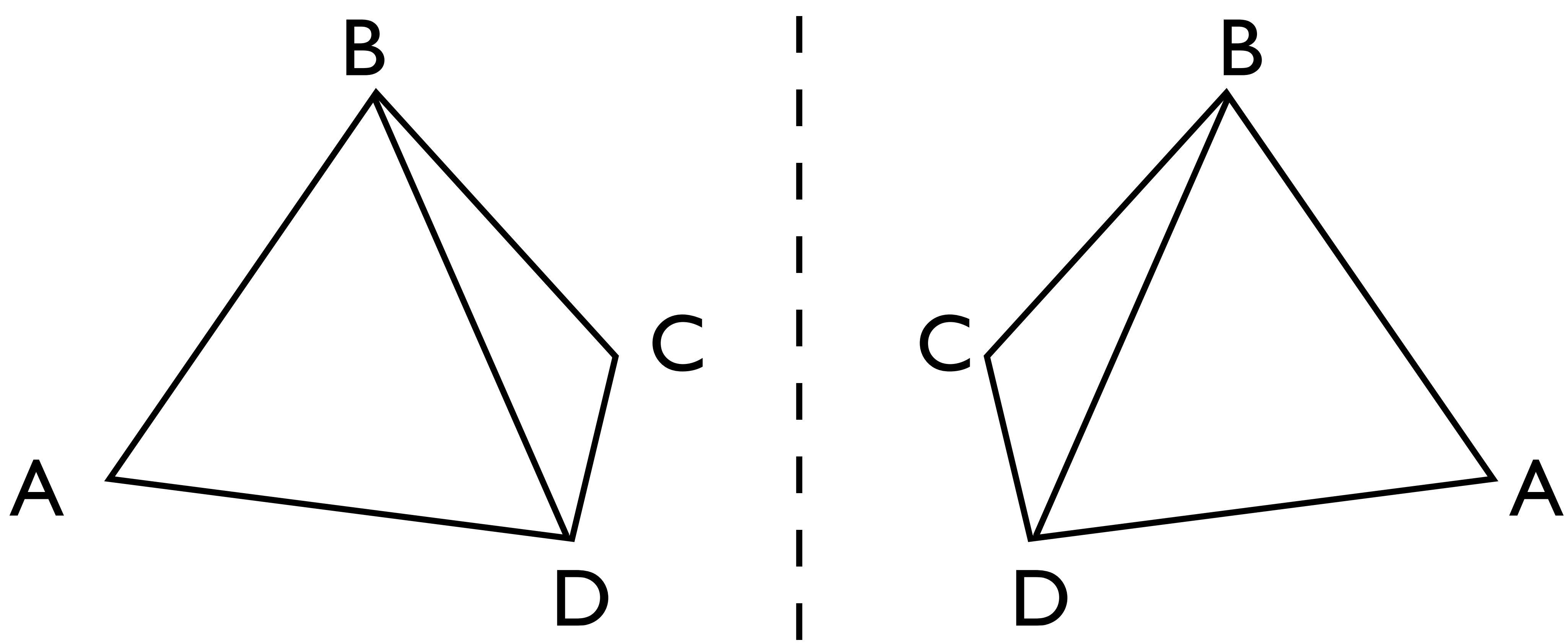
単体の向きの考え方

- **偶数回の互換で移り合えるものは同じ向きである.**



単体の向きづけ -３次元単体の場合-

- 向きは常に２種類ある.



$\langle ABCD \rangle$ ← $\langle DBCA \rangle$

AとDの入れ替え（１回）

単体の向きづけ -0次元単体の場合-

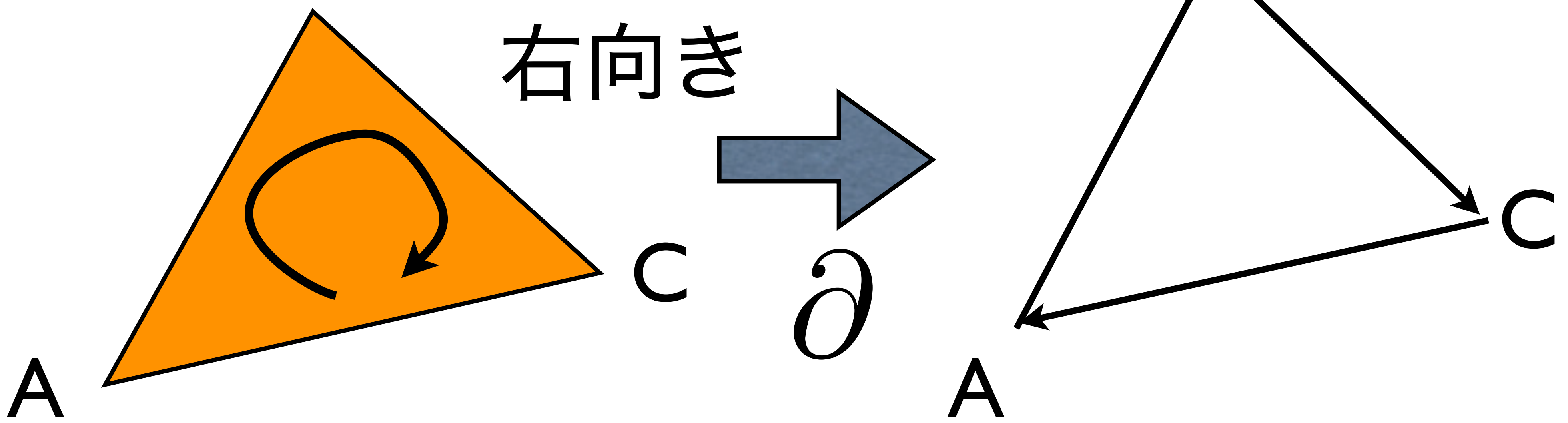
- 0次元単体（点）の場合には，並べ方は一通りであるが，やはり２つの向きを考える.

$\langle A \rangle$　　　　$-\langle A \rangle$

なぜ向き付けするのか？

- 向きを付けることによって，境界を代数的に扱うことができる

境界の計算



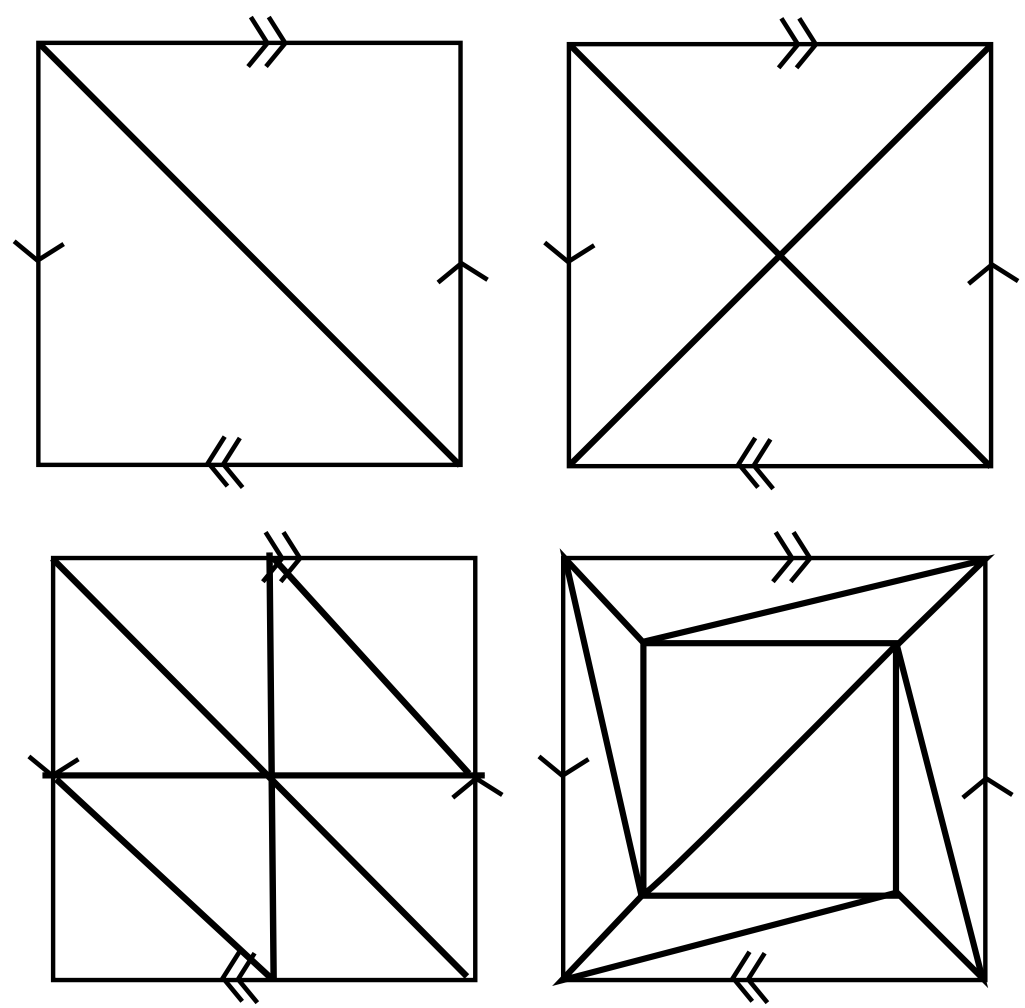
$\langle ABC \rangle$

$\langle AB \rangle + \langle BC \rangle + \langle CA \rangle$

経路のはなし

射影平面の単体分割

- 左上, 右上, 左下は複体にならない.

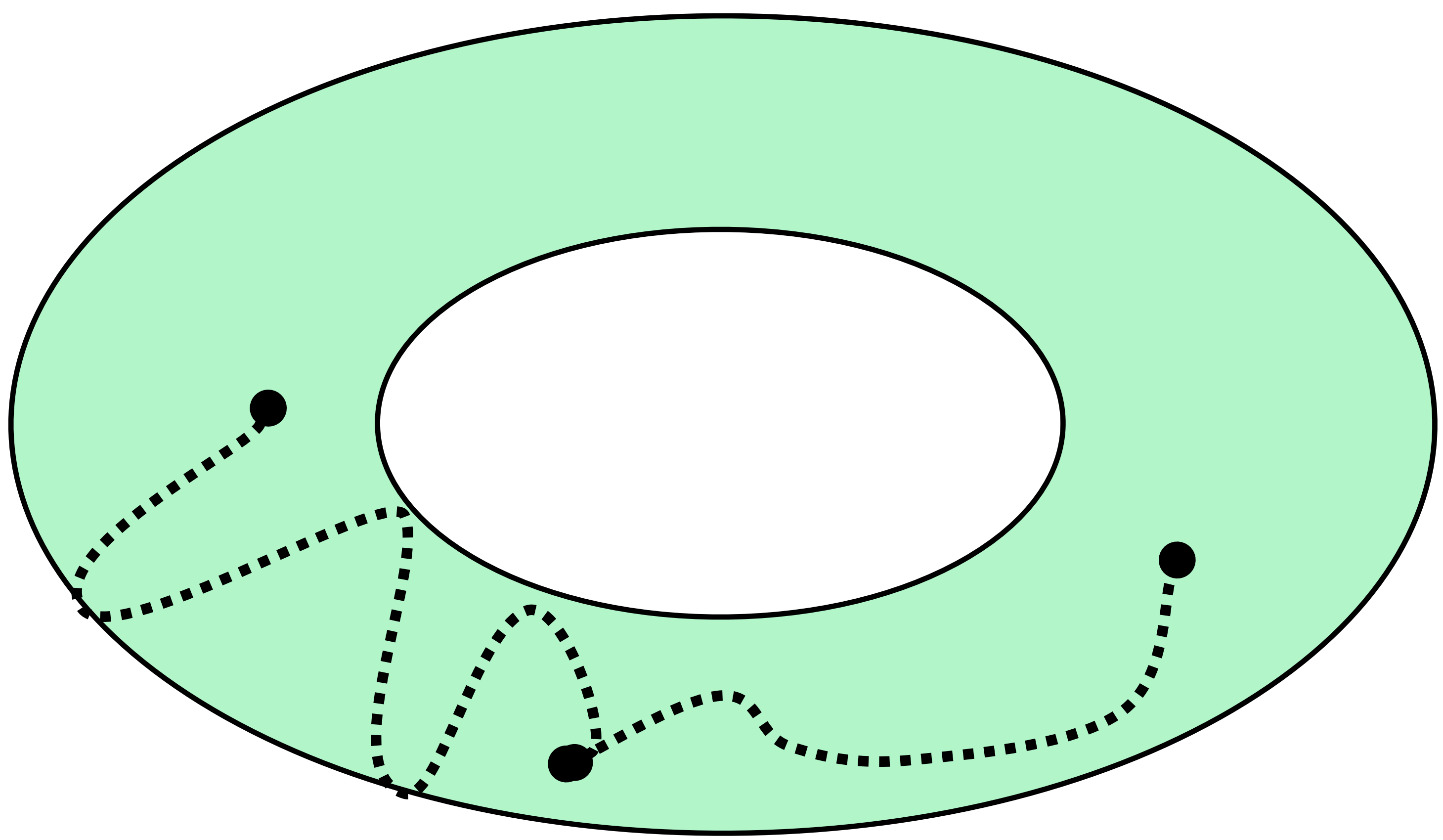


与えられた空間を分析するには...

- 空間を我々の良く知っている空間に分解して考える．→伝統的な考え方．たとえば線形空間などの考え方
- 空間の中を動き回って，どのように移動できたかについて調べる．→**ポアンカレの基本群**

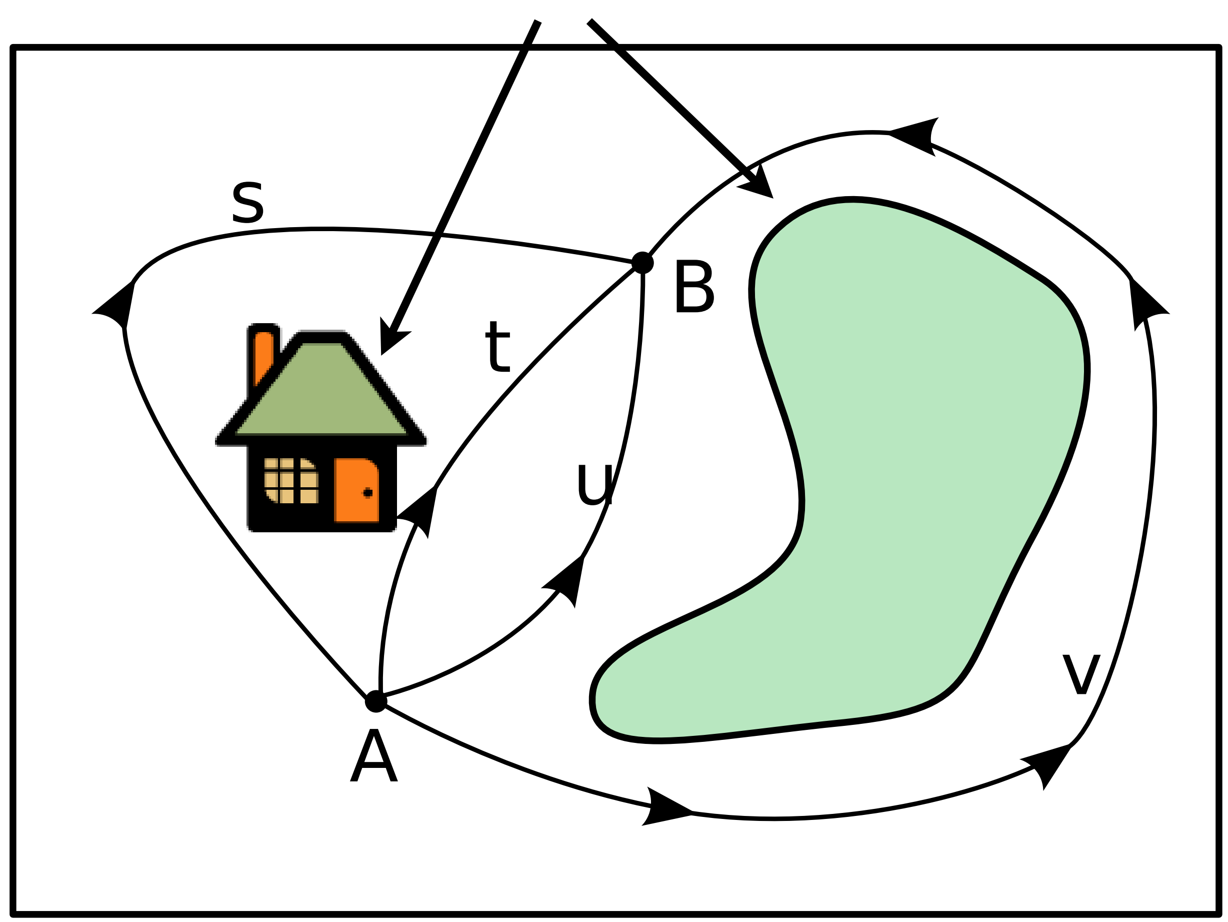
経路を考える

- 与えられた空間を歩き回るとき，どのような歩き方が可能か？



図形と経路

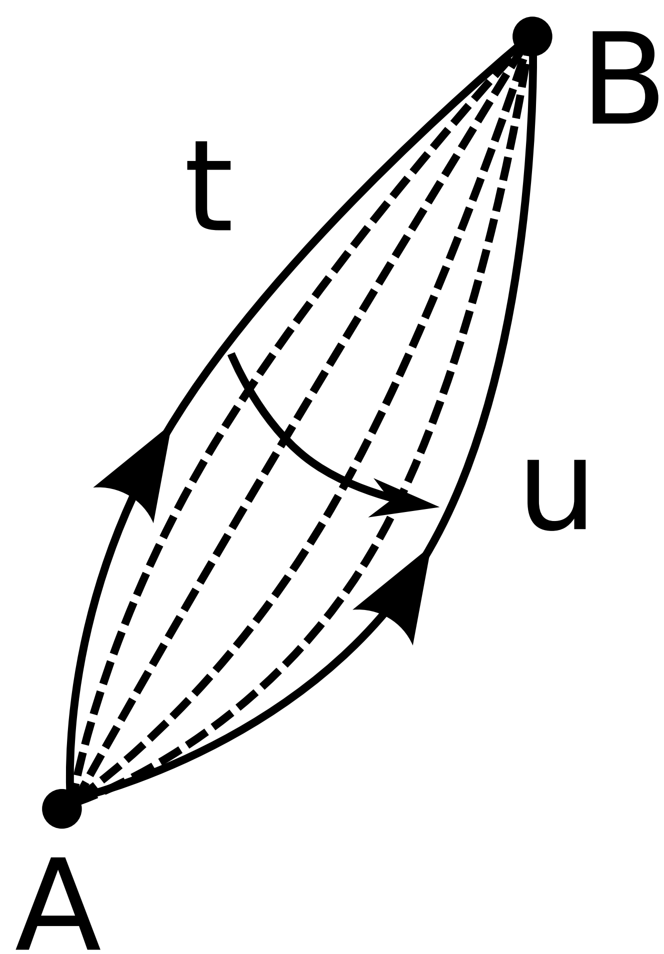
- 与えられた図形から外へ出ずに地点Aから地点Bまで移動する



与えられた図形

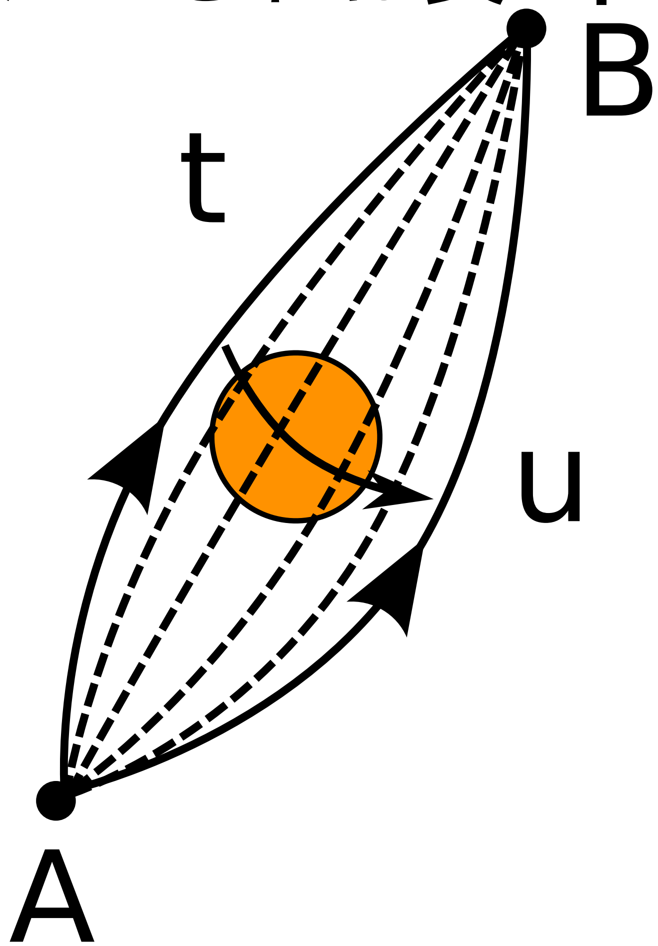
同じような経路でも何通りもある

- tを通ってもuを通っても大して変わらない．ちょっとずらすだけでtからuへ移すことができる．



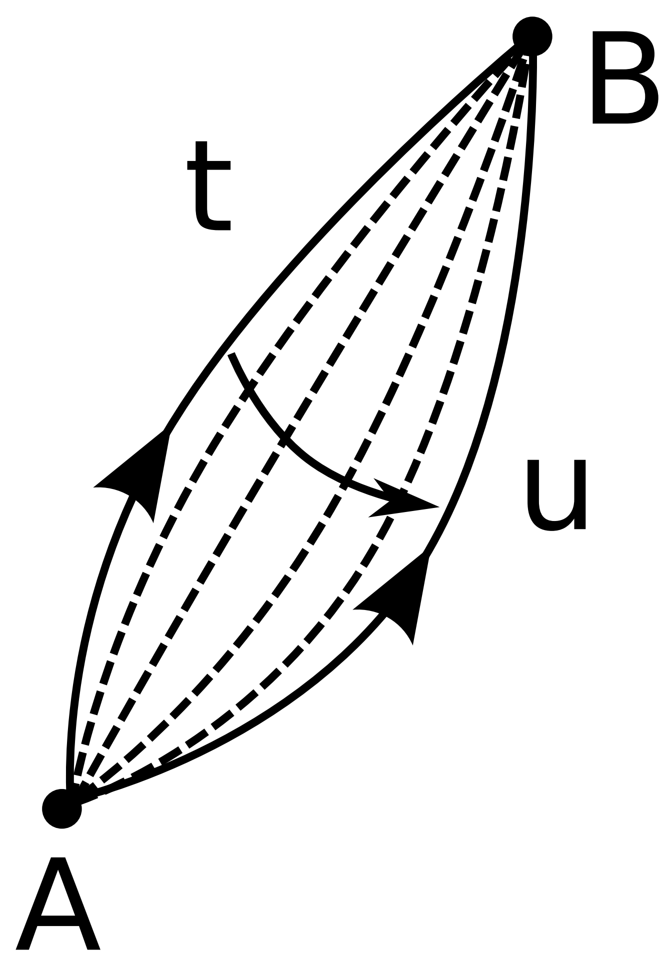
同じような経路でも何通りもある

- tを通ってもuを通っても大して変わらない．ちょっとずらすだけでtからuへ移すことができる．
- ただし，障害物があるとダメになる．もちろん障害物を避けることができれば良い．



同じ経路と違う経路を区別したい

AからBへの経路がA, Bを固定して，じわじわと変形できるとき，２つの経路は**ホモトピック**であるという

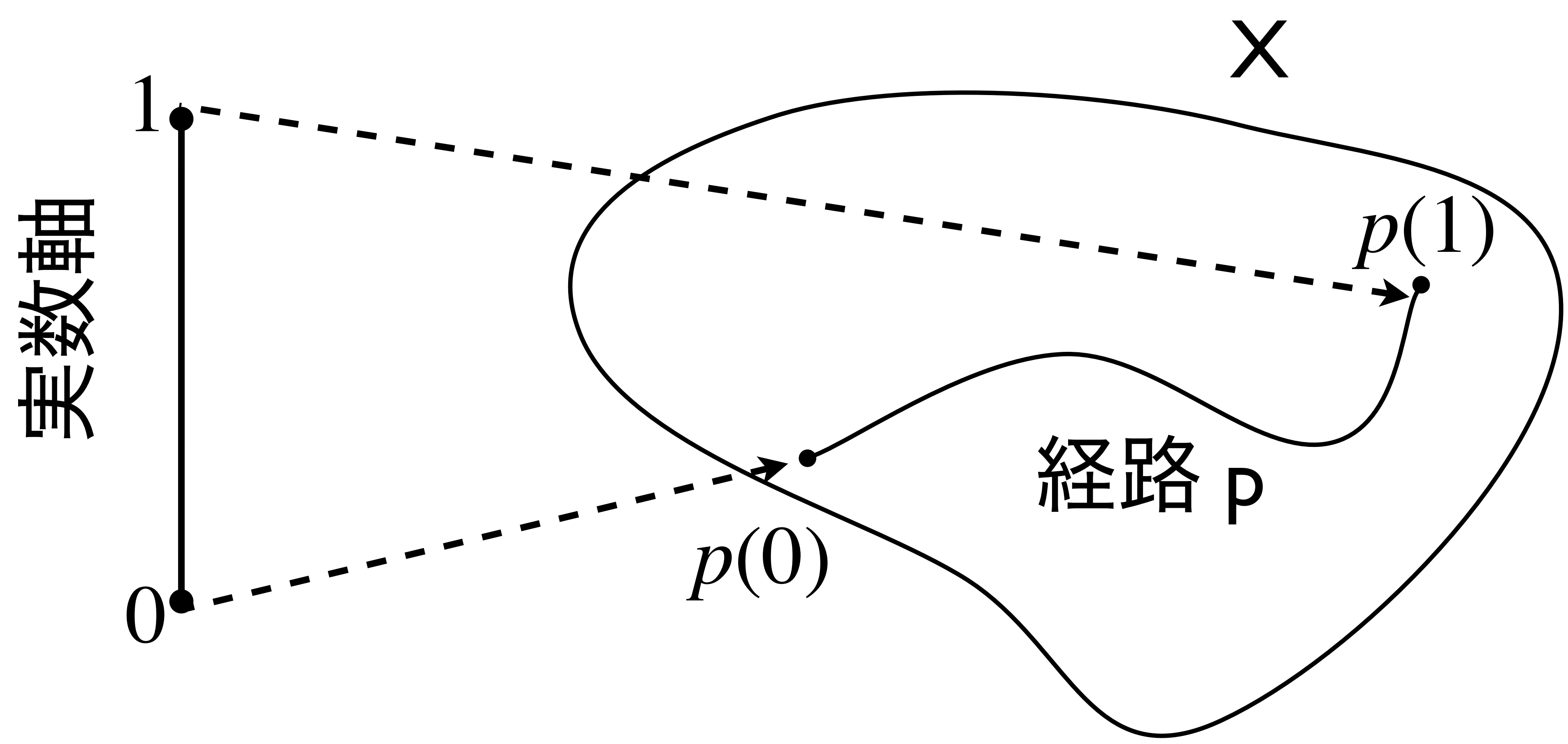


形式的な定義：経路とは

- まず，経路を定式化する．

pは連続写像である

$$p : [0,1] \to X$$

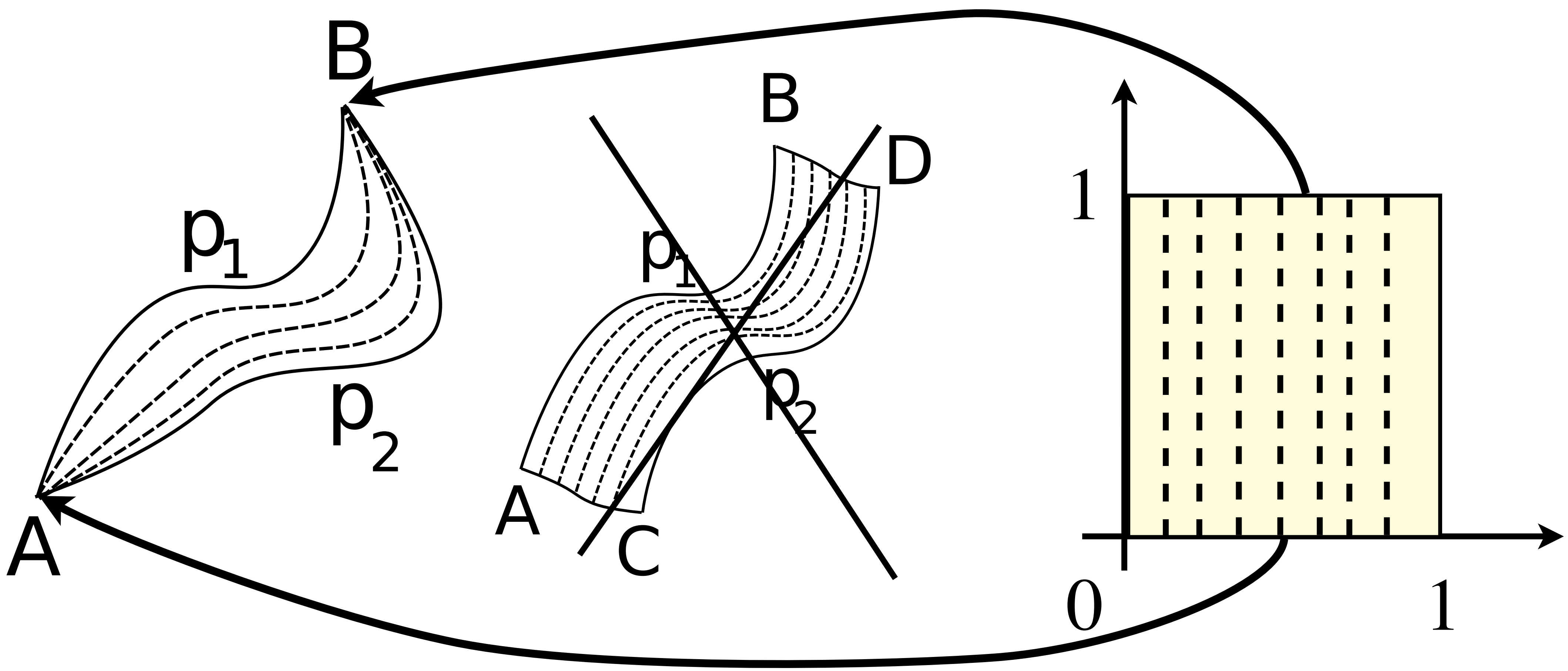


形式的な定義：ホモトープ性

Fは連続写像である

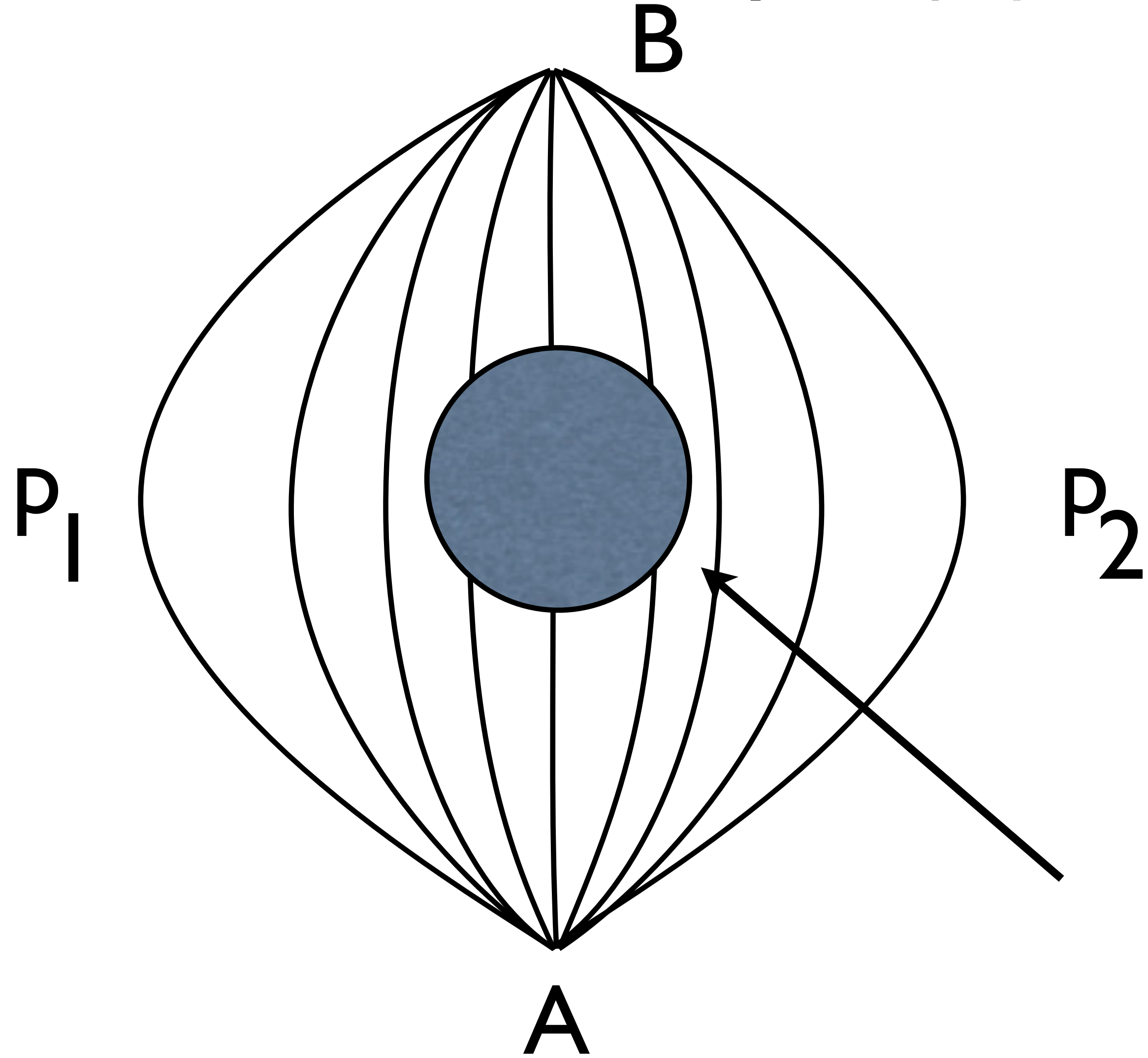
- 一般のホモトピーは経路の始点や終点を一致させる必要がないと，ここでは基本群を考えるので始点や終点は固定する.

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$$



ホモトープでない経路

- 正方形を連続的に写像できないようなケースではホモトープではない．連続性が鍵となる．



全く別の方法があれば話は別だが，基本的にp1からp2へじわじわと変形させる方法はない

ここは通れない

ホモトープ性は同値関係である

- aとbがホモトープであると，a〜bと書くことにする.

✳a〜a

$F(t,s)=p(t)$

✳a〜bならばb〜a

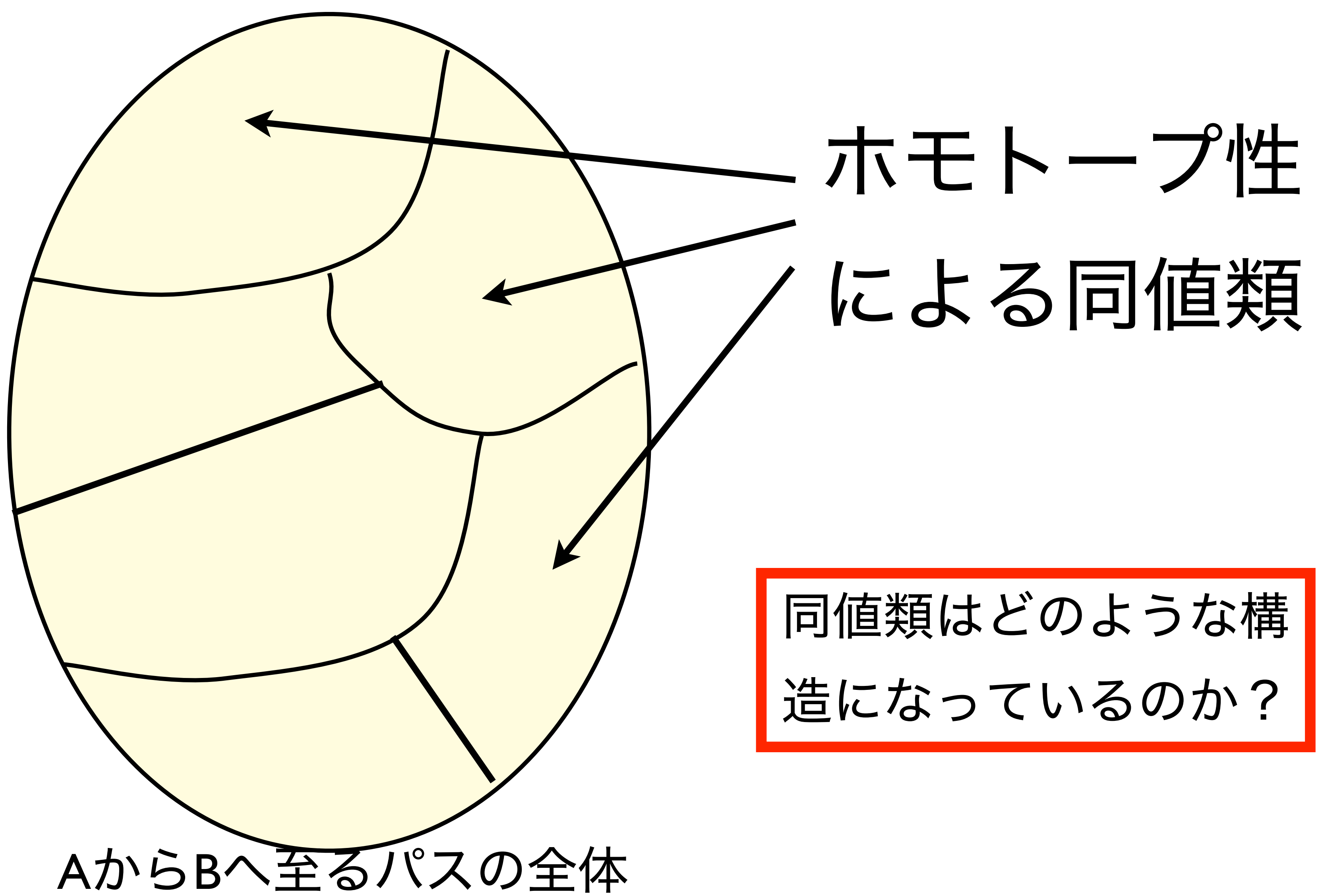
$G(t,s)=F(t,1-s)$

✳a〜bかつb〜cならばa〜c

$$H(t,s)=\begin{cases} F(t,2s) & (0\le s\le 1/2) \\ G(t,2s-1) & (1/2\le s\le 1) \end{cases}$$

同値関係があると，同値類が作れる

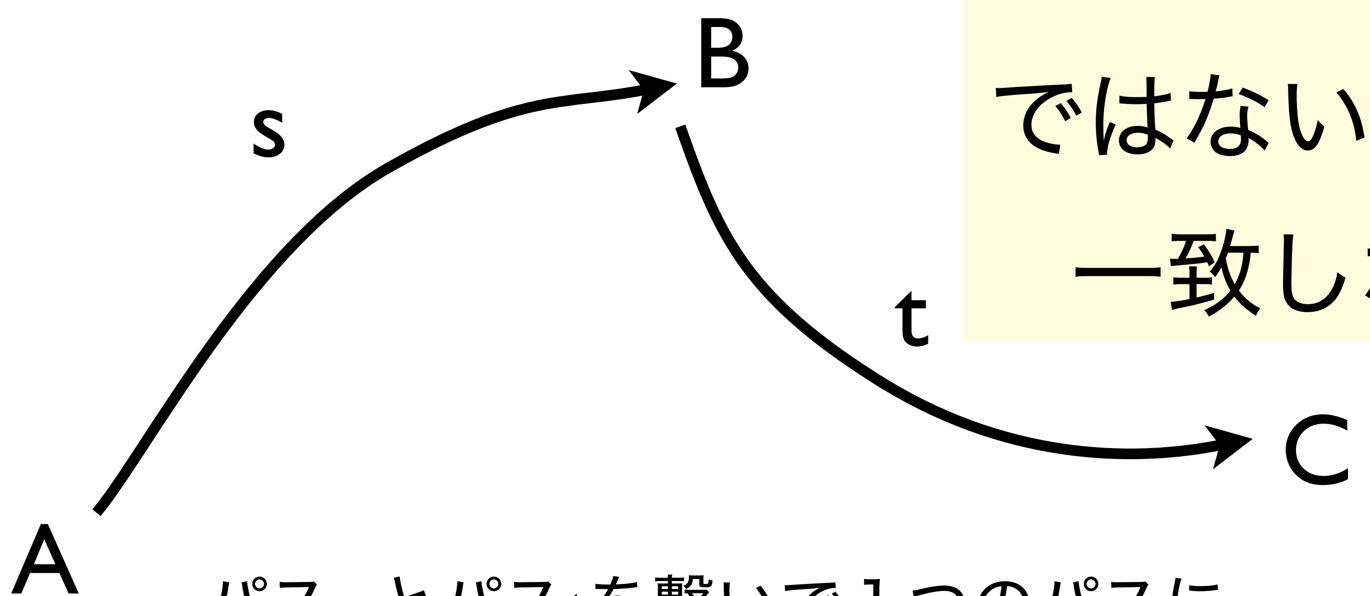
- 集合の上に同値関係があれば，その集合の同値類を定義することができる.



同値類はどのような構造になっているのか？

パスとパスの演算

- パスどうしに演算を定義する.



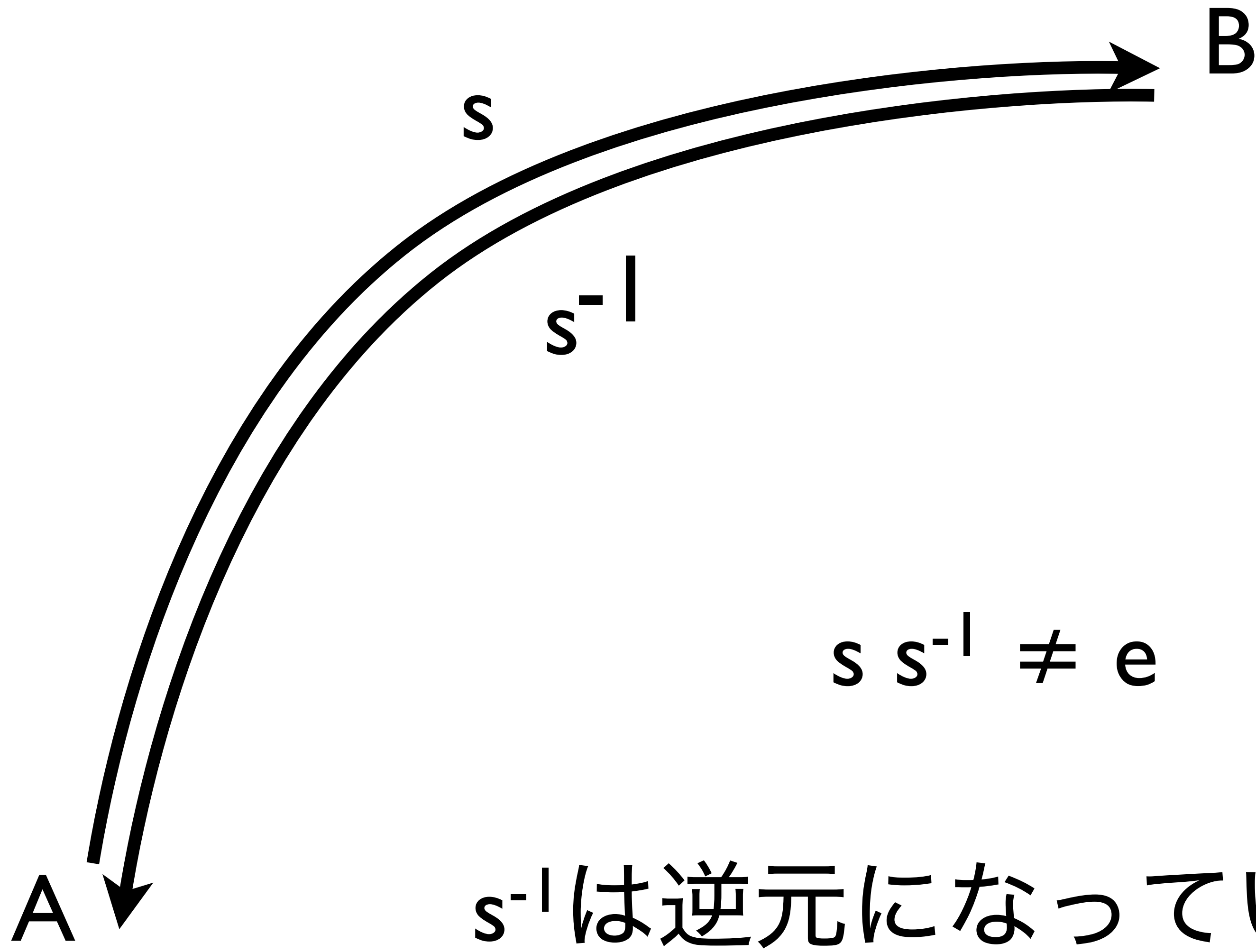
パスs とパスtを繋いで１つのパスに
したものをstと書くことにする.

パスはいつでも演算できるわけ
ではない．sの終点とtの始点が
一致しなければならない.

行列に似ている．サイズが一
致しないとかけ算ができない

逆向きの経路

- 任意の経路sについて，その向きを変えた経路をs^{-1}と書く．



$s\,s^{-1} \neq e$

s^{-1}は逆元になっていない

結局，経路の演算は全く群にならない

- それでは群として経路演算を考えることは無理か？

NO. 実はホモトープ性を

考えると経路は群になる

群として扱うための指針

- つぎのようにすれば実は群になる.

- いつでも演算ができるために，ただの経路ではなくて，ある基準の点から出発してその点へ戻ってくるような経路のみを考えます.

- 上記の経路のうち，ホモトープなものは同じ経路であるとみなすします.

この話は次回で...