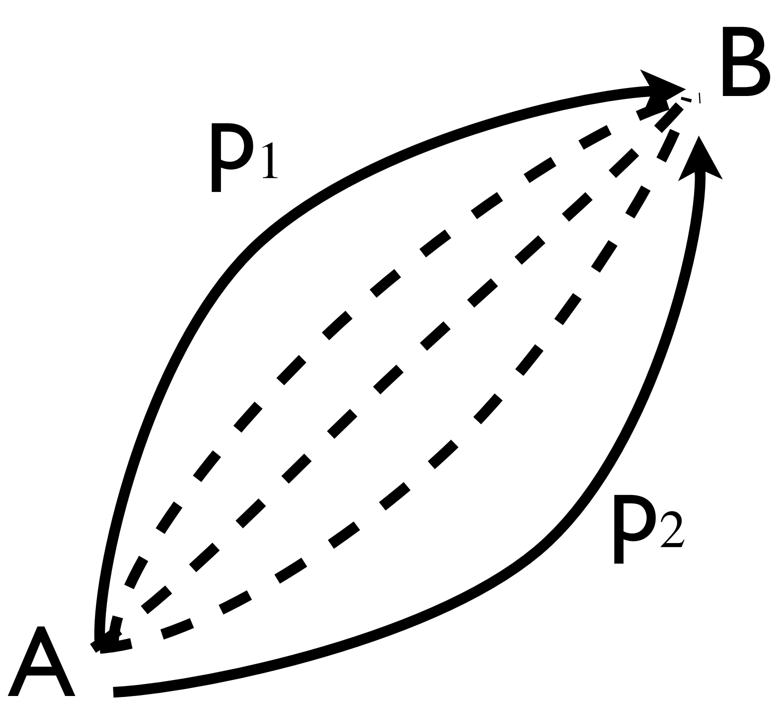
幾何学入門第12回
基本群のはなし

山本修身

名城大学理工学部情報工学科

前回の復習

- 与えられた位相空間の性質を調べるために経路(path)を定義した.
- 始点と終点を共有する経路の間にホモトピー（ホモトピック性）を定義した.



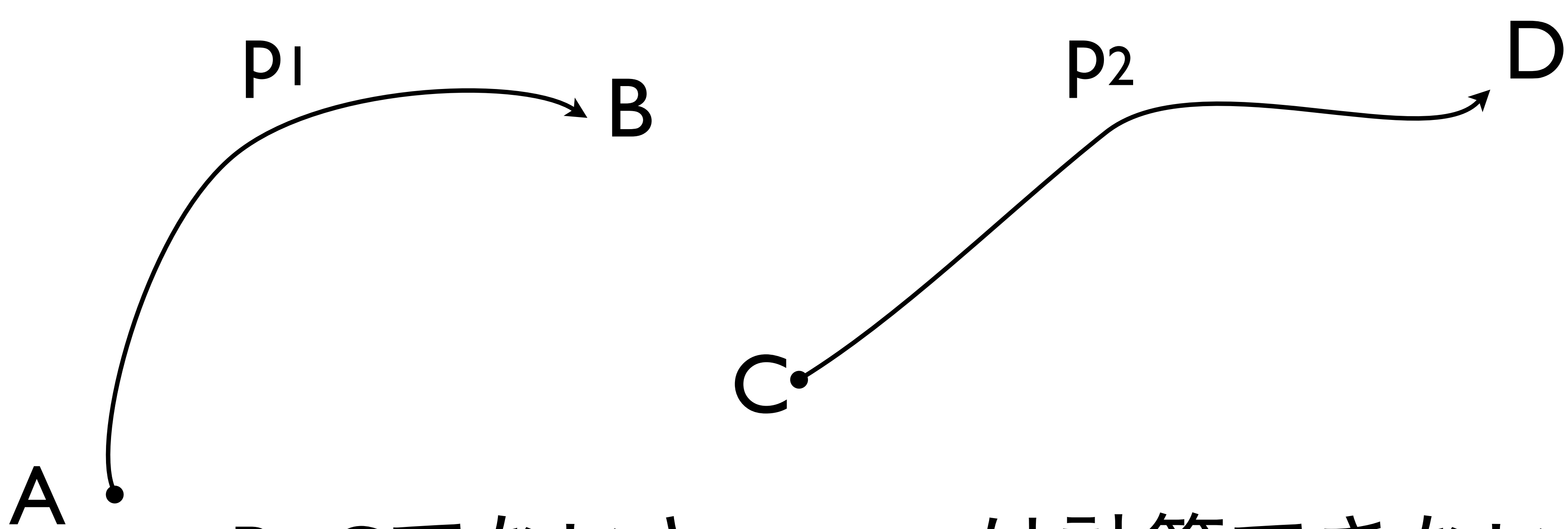
ホモトピーは同値関係なのでAからBへの経路全体を類別することができる

本日の目標

- 経路を群として扱いたい！
- 経路の集合によって，与えられた位相空間を分類したい.

問題点：任意の経路は演算できない

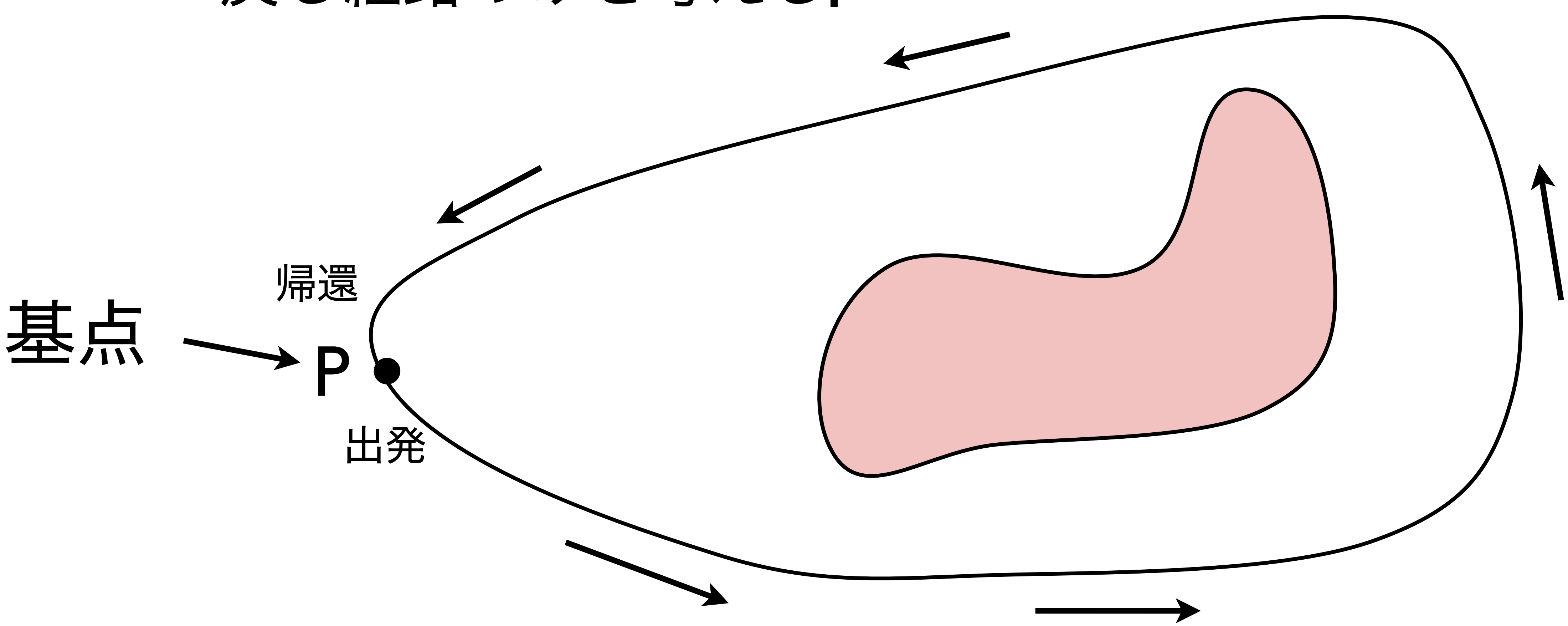
- 終点と始点が一致しないと演算できない.



B=Cでないとp_1・ p_2は計算できない

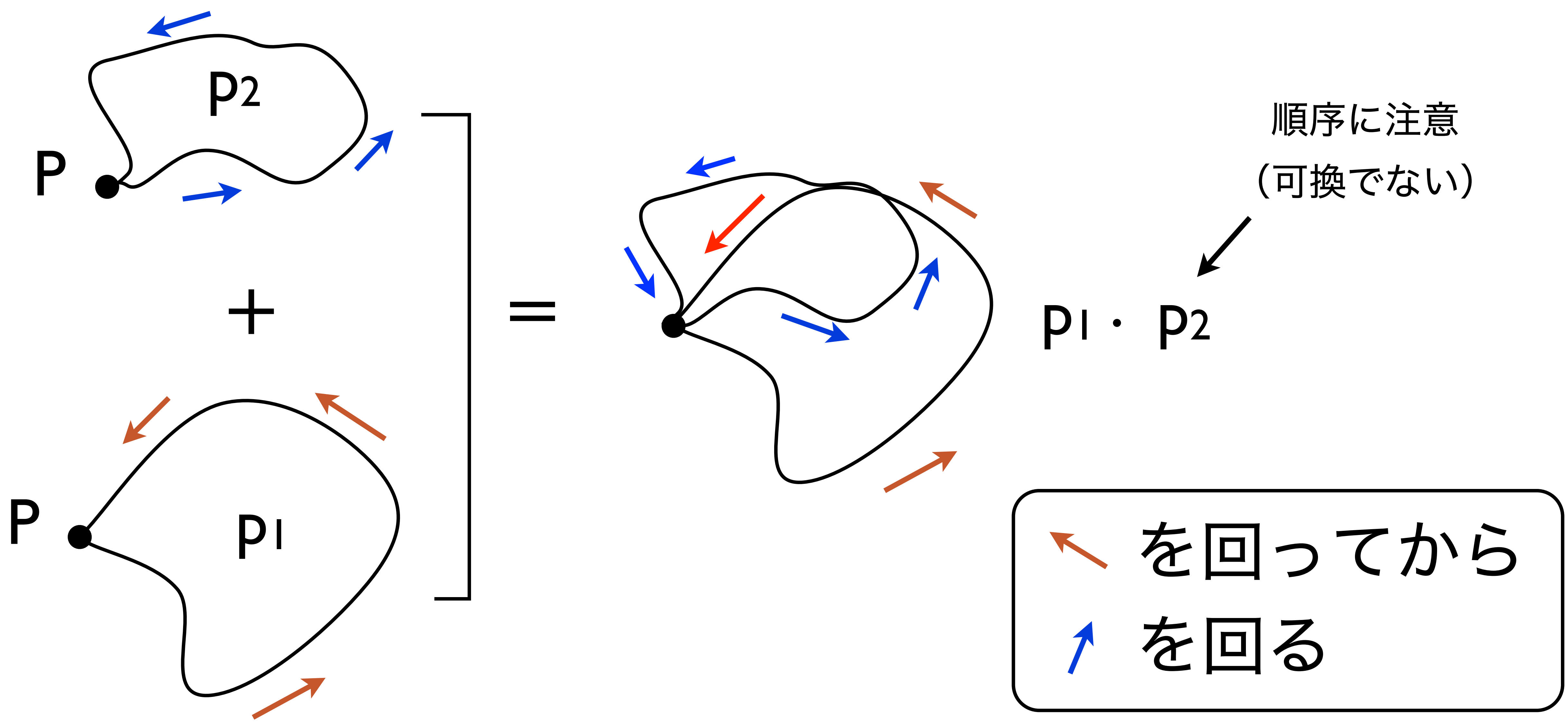
第１のアイデア：経路の演算を制限する

- 対象とする経路をすべての経路とすると，いつでも演算ができるとは限らない．
⇒ある点（基点）を決めて，そこを出発してそこへ戻る経路のみを考える．



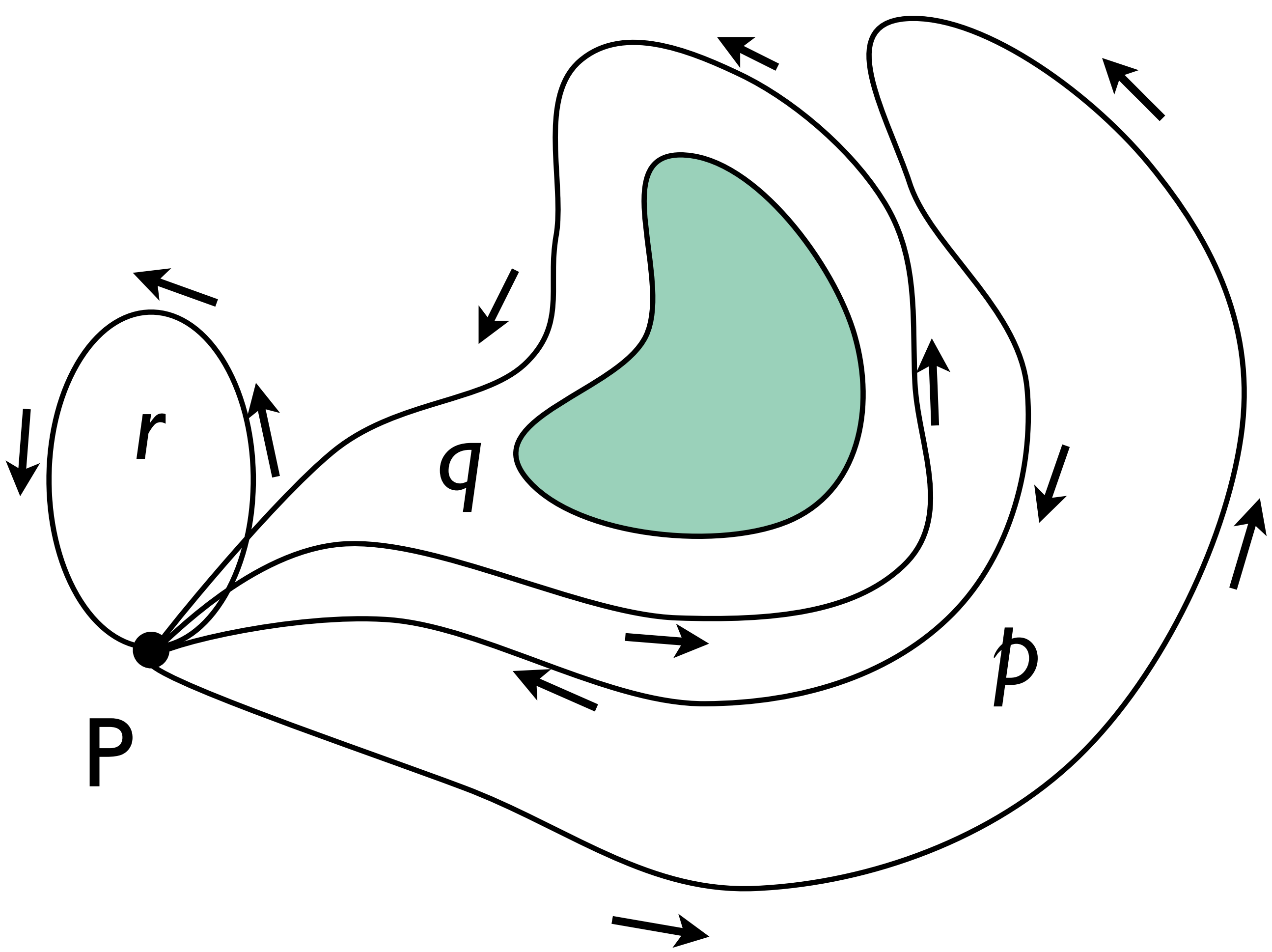
ループを制限すると，いつでも演算することができる

- 始点と終点が一致しているので，どの組み合わせでも演算ができる．



第２のアイデア：ホモトピー

- **<u>ホモトープなループは同じものとみなす</u>**.
- これによって，お互いに移り合えるループは同じものと考えることができる.



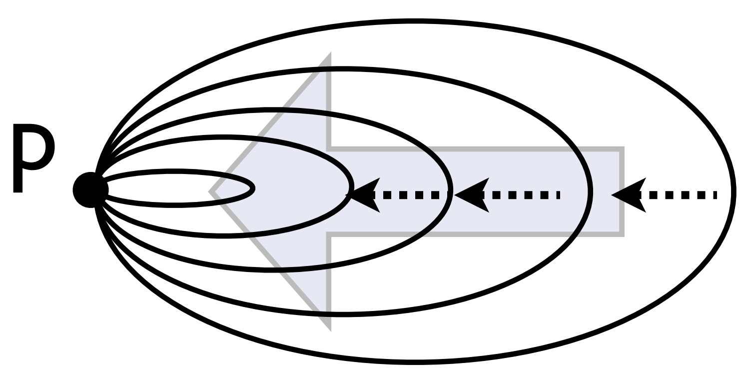
$p = r$

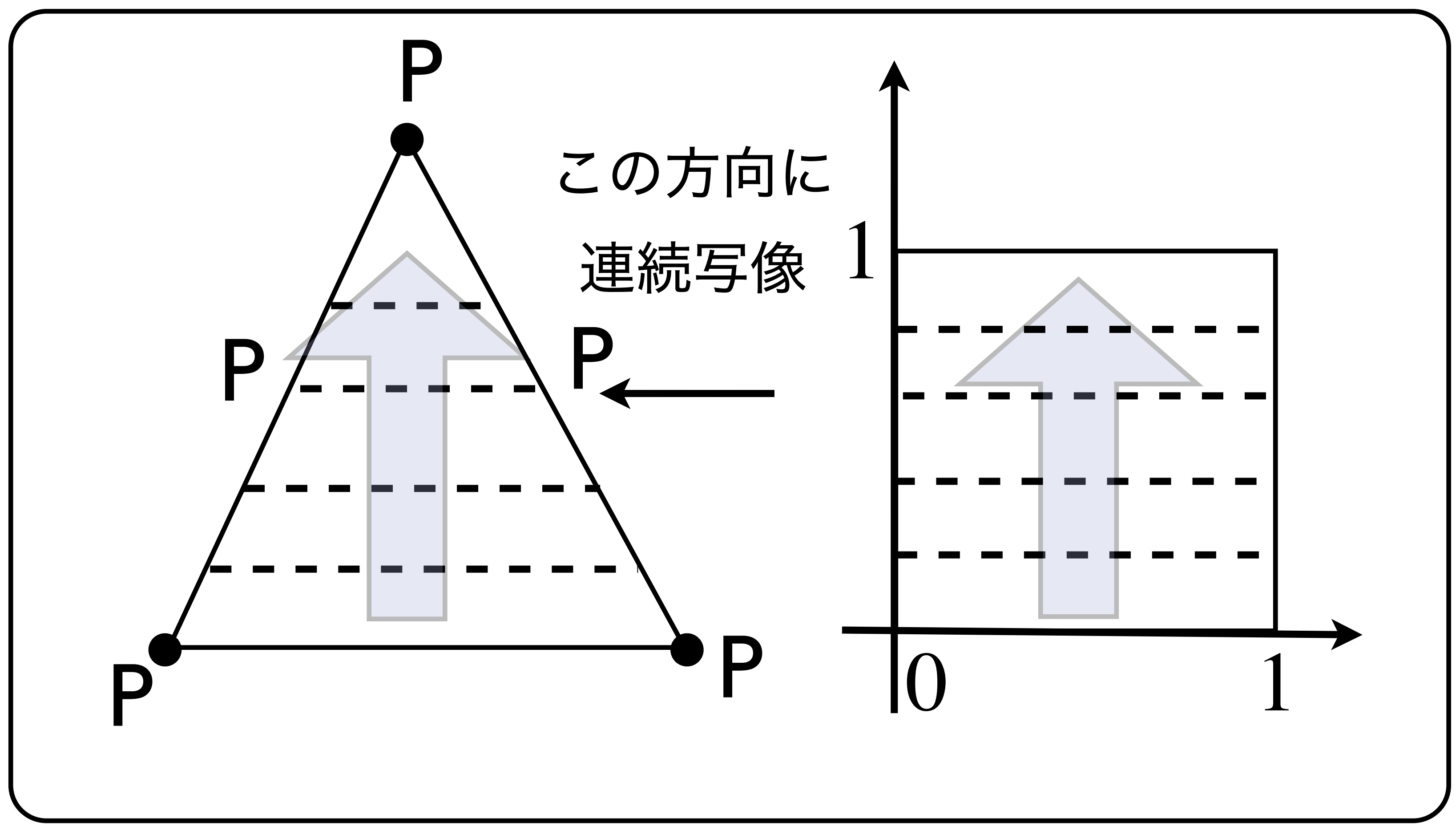
$p \neq q$

$r \neq q$

障害物がないループは１点とホモトープ

- 内部に障害物がなければ，ループは１点に集約できる（可縮という）





２つのアイデアを用いると
ループは群をなす

- 結論から言うと，与えられた位相空間とその中の一点Pが与えられると，そこからループの群ができる．この群のことを**基本群 (fundamental group)**と呼ぶ.

- 位相同形な図形の基本群は同形になる．従って，基本群が異なる図形は位相同形ではない.

- しかし，基本群が同じだからと言って位相同形とは限らない.

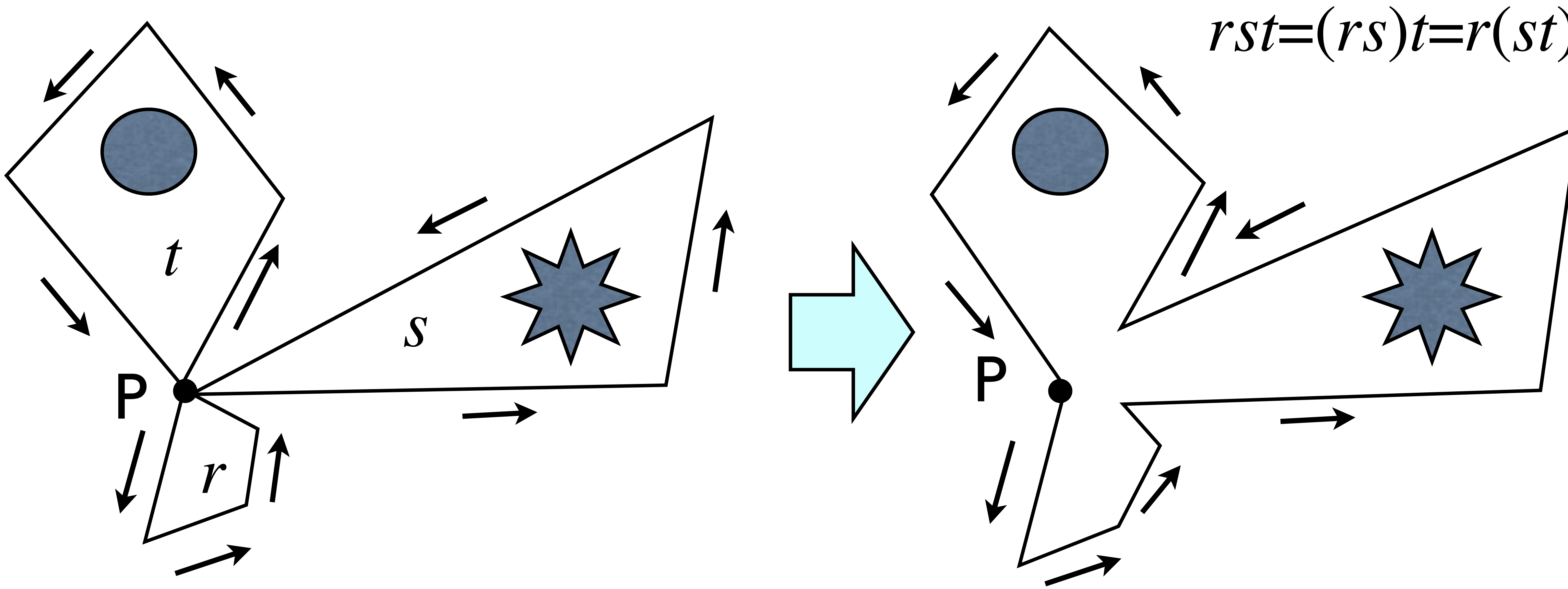
図形　基点

$$\underline{\pi_1(X;P)}$$

基本群は記号でこのように書く

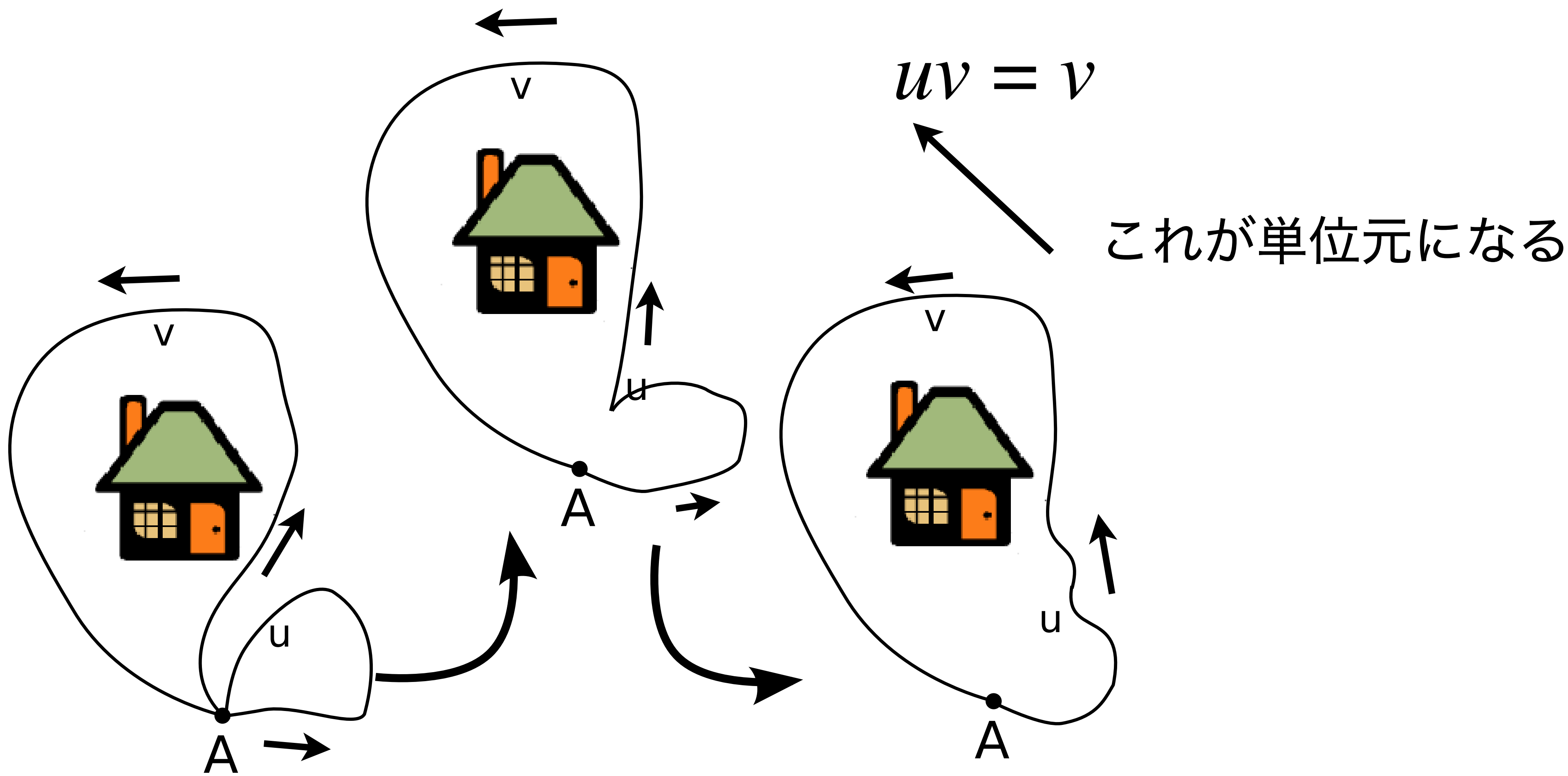
ループが群をなす理由その１

- ループの演算は結合則を満たす.



ループが群をなす理由その２

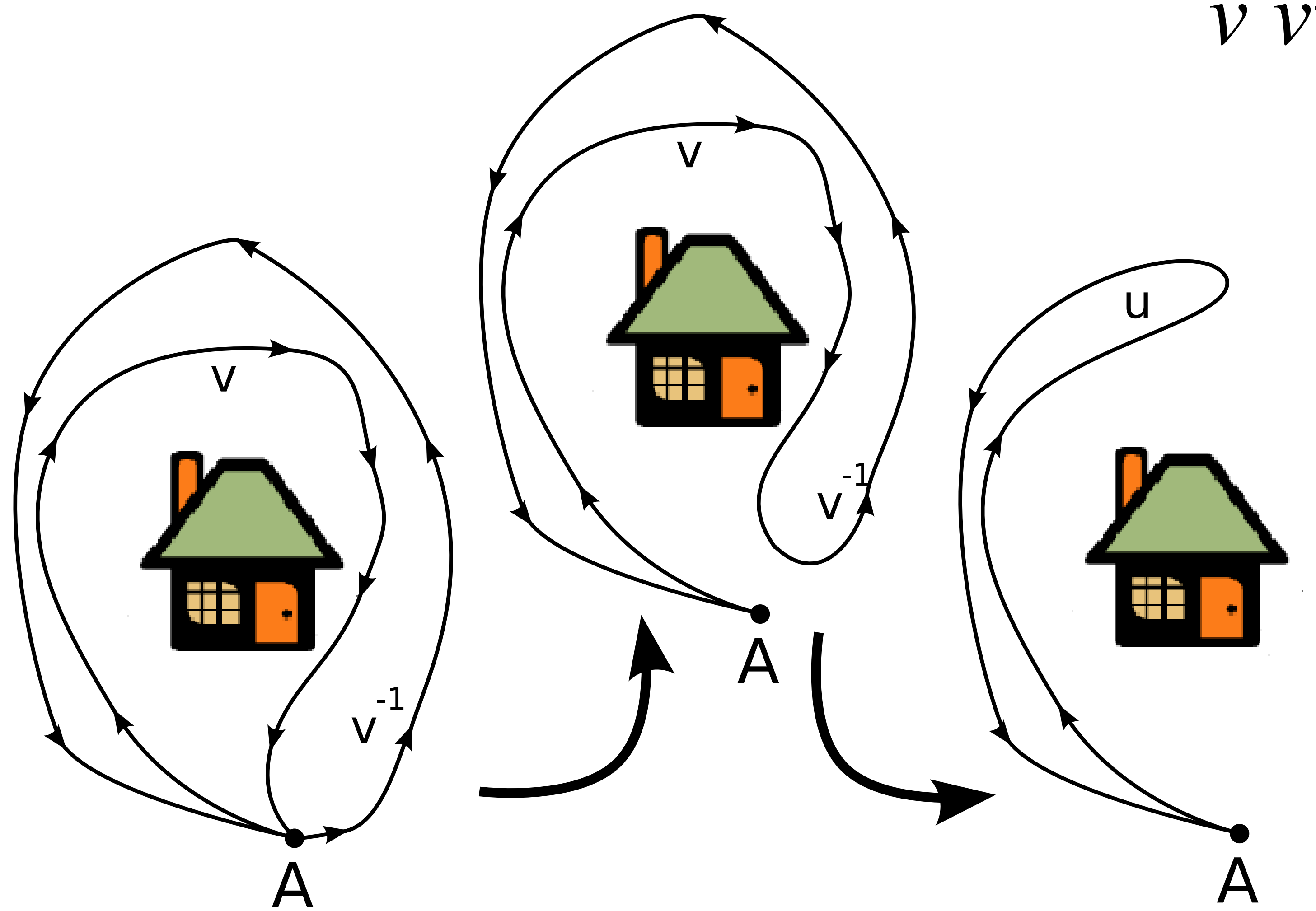
- 単位元が存在する.
- ホモトピックなものを同等に扱うからこうなる



ループが群をなす理由その３

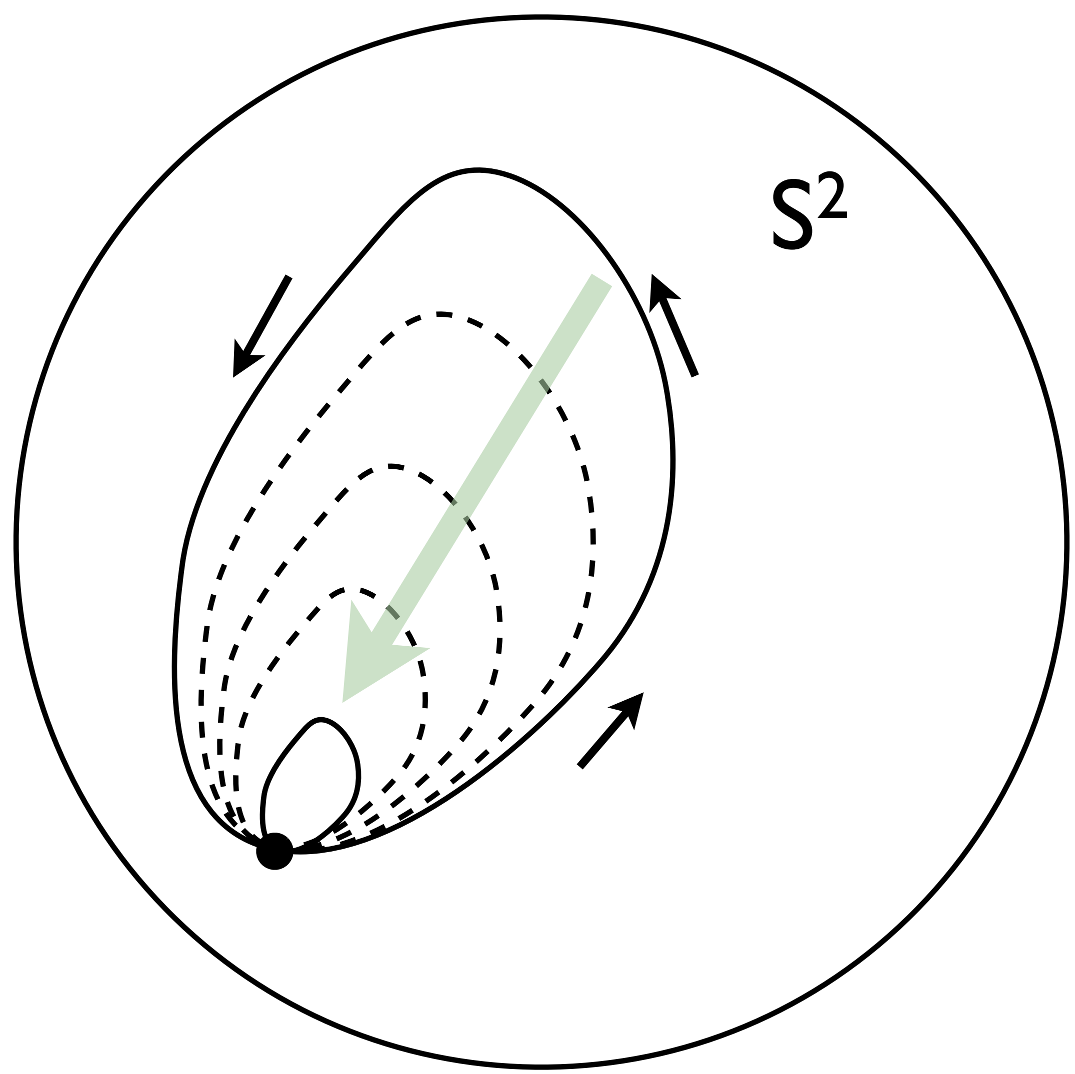
- 任意のループには逆元が存在する.

$$v\,v^{-1} = e$$



基本群の例：球面の基本群

- 球面上のループはすべて１点とホモトピックである.
- 球面の基本群GはG = {e} である



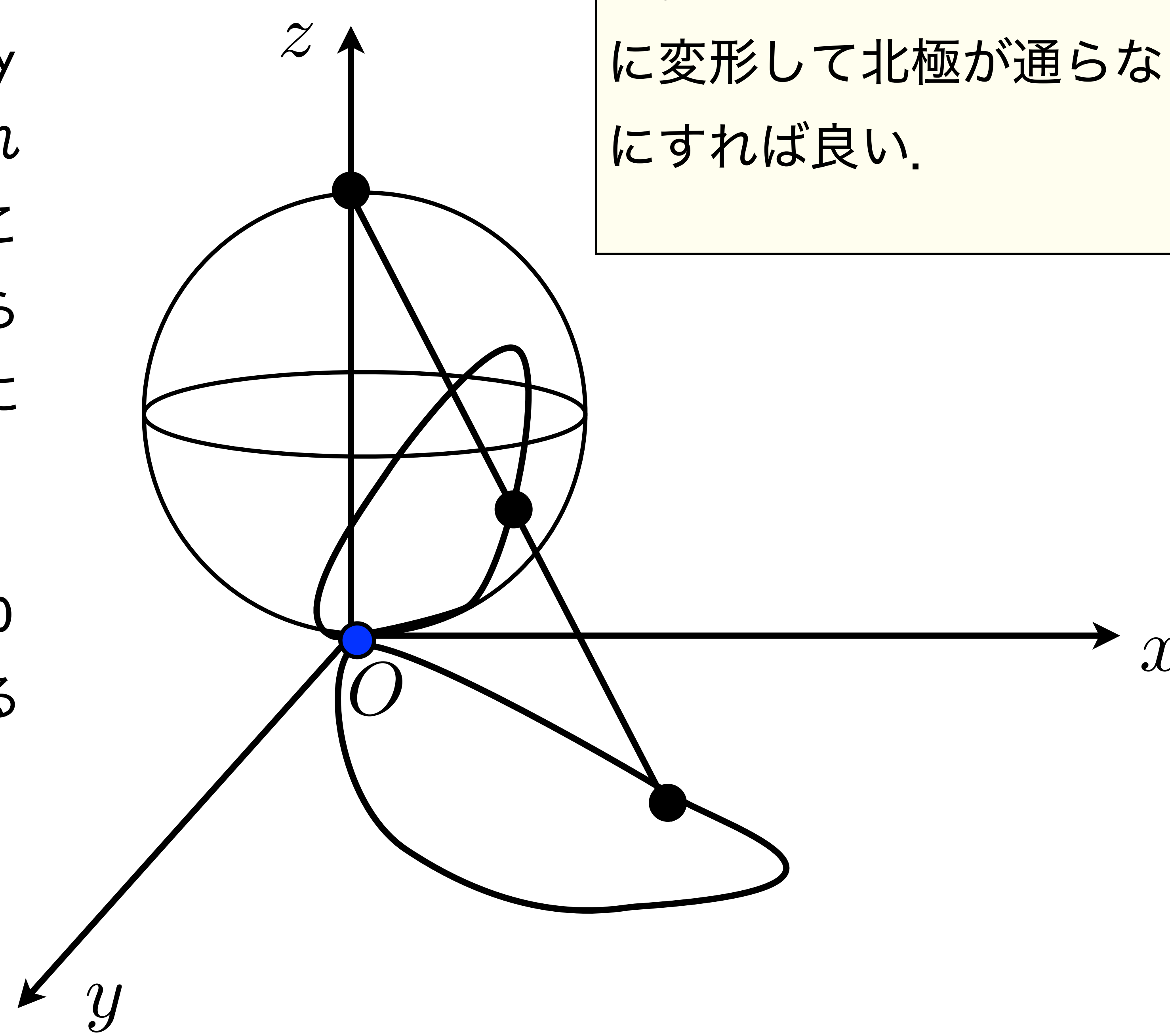
球面のステレオグラフィック写像を用いた説明

球面上（ただし北極を除く）の点とxy-平面を同相につなぐ写像．北極と無限遠点（∞）（xy平面に追加する）を対応させれば球面と平面は同相となる．ここで球面上の経路は北極を通らなければ，下図のように平面に移すことができる．

あとは，下のような変換で$t \to 0$とすることで原点に一致させることができる．

$$(x, y) \mapsto (tx, ty)$$

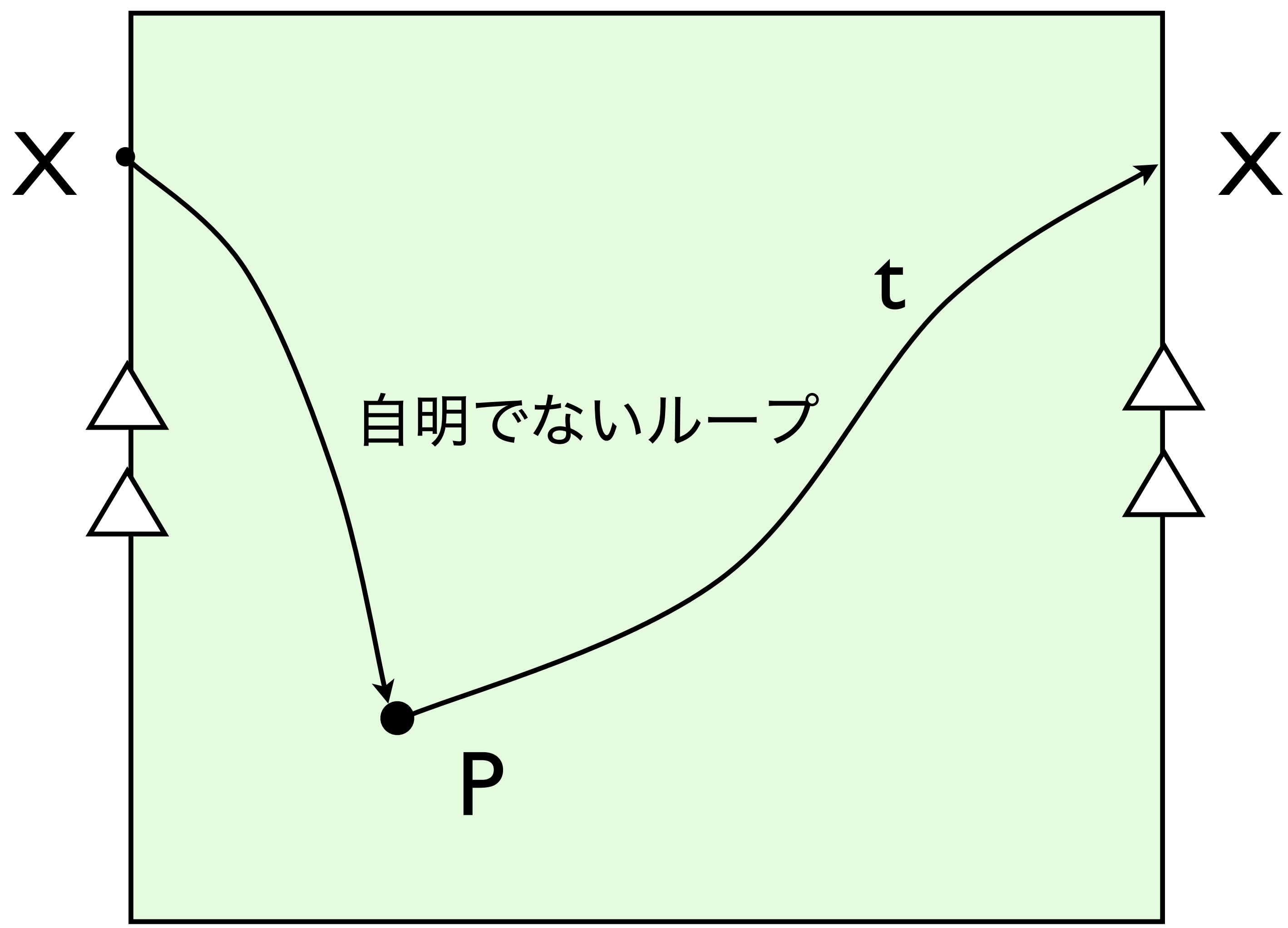
北極を通過する場合には，北極で少しだけホモトピックに経路に変形して北極が通らないようにすれば良い．



基本群の例： 円柱の基本群

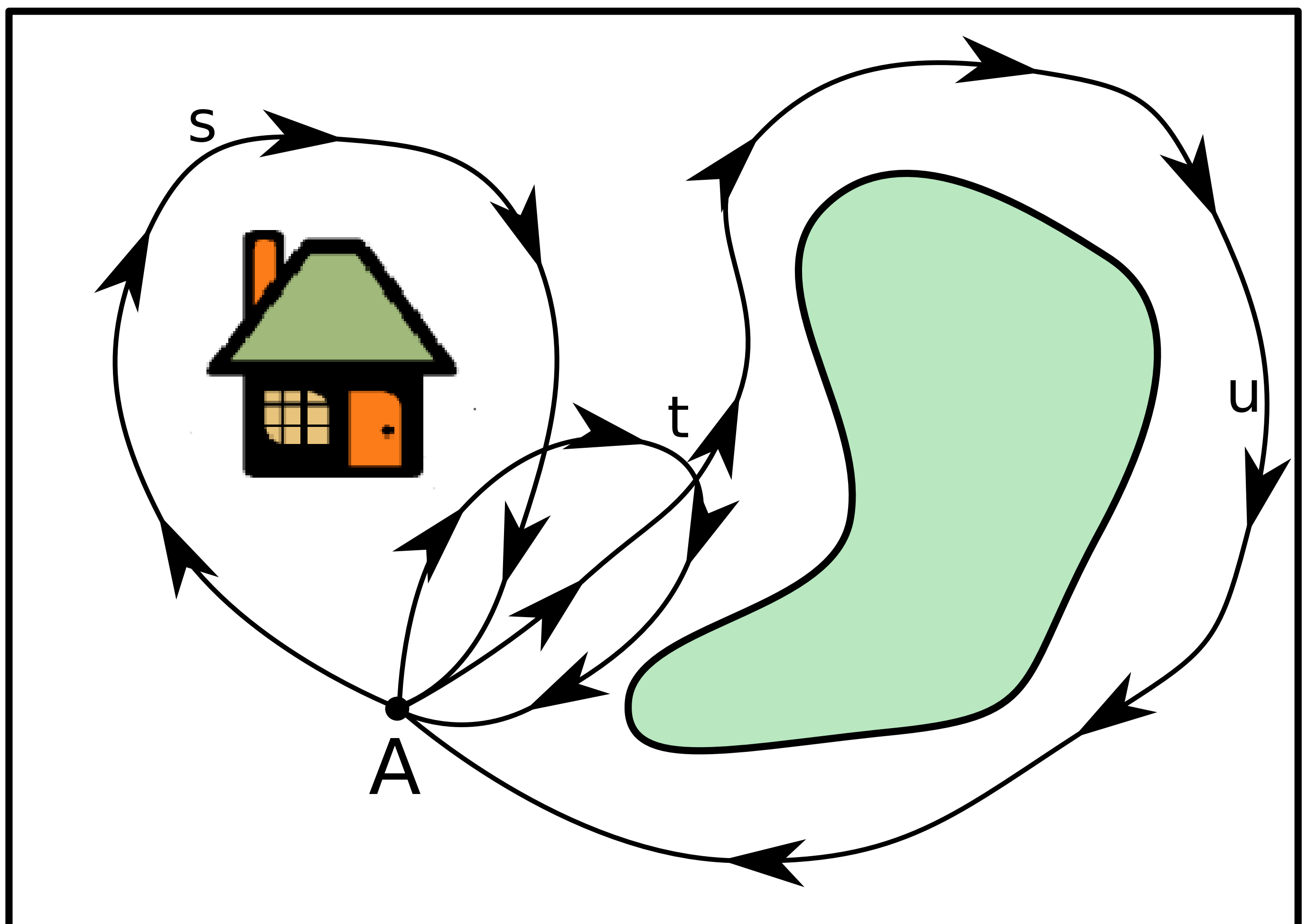
- 底面のない円柱の基本群について考える.

$G = \langle t \rangle = \{e, t, t^2, t^{-2}, \ldots\}$



前回の庭の図形の基本群

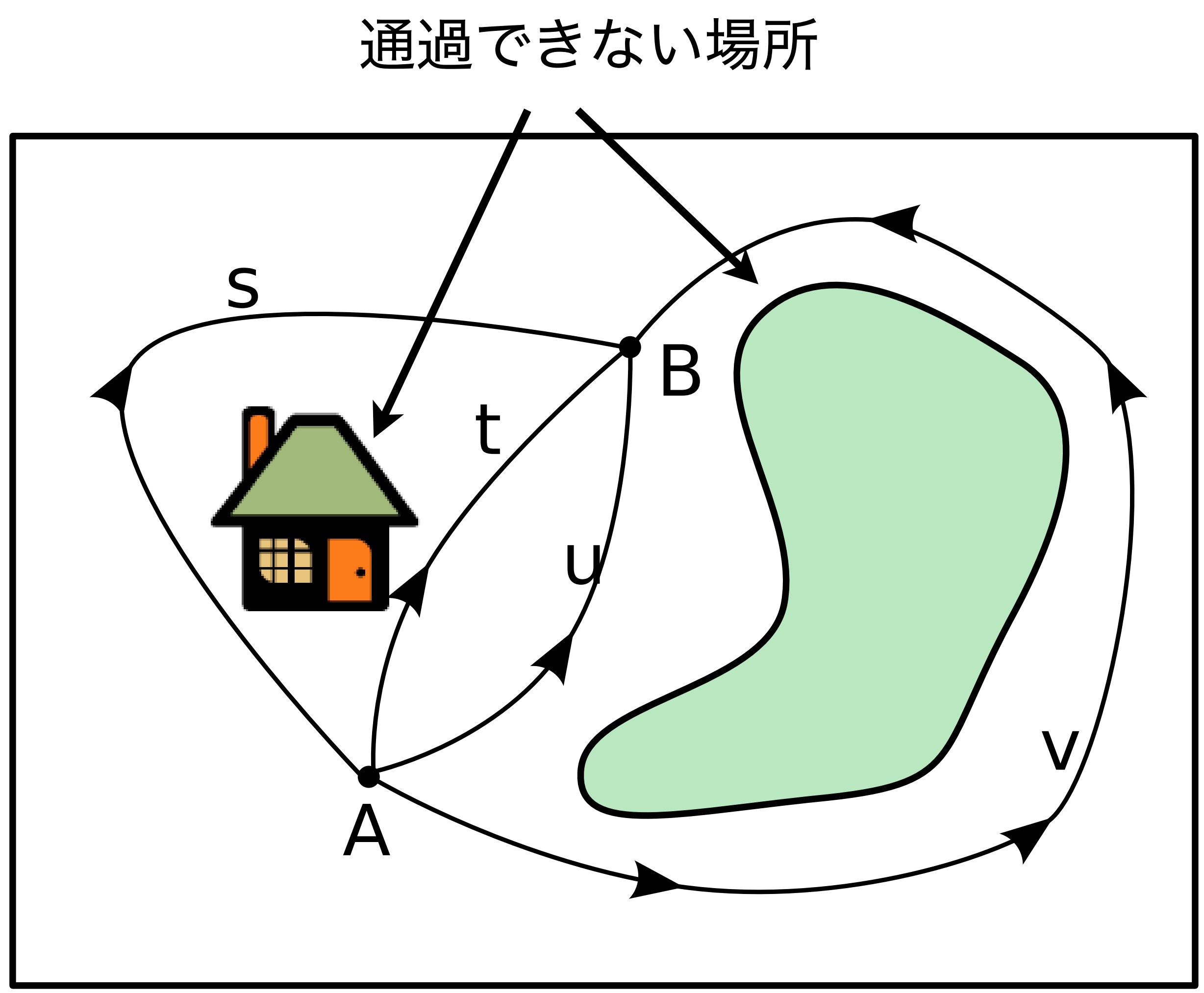
- 前回の家と池のある家の基本群について考える.



- G = <s, u>
- tは単位元

AからBへの経路の全体をどう考えるか？

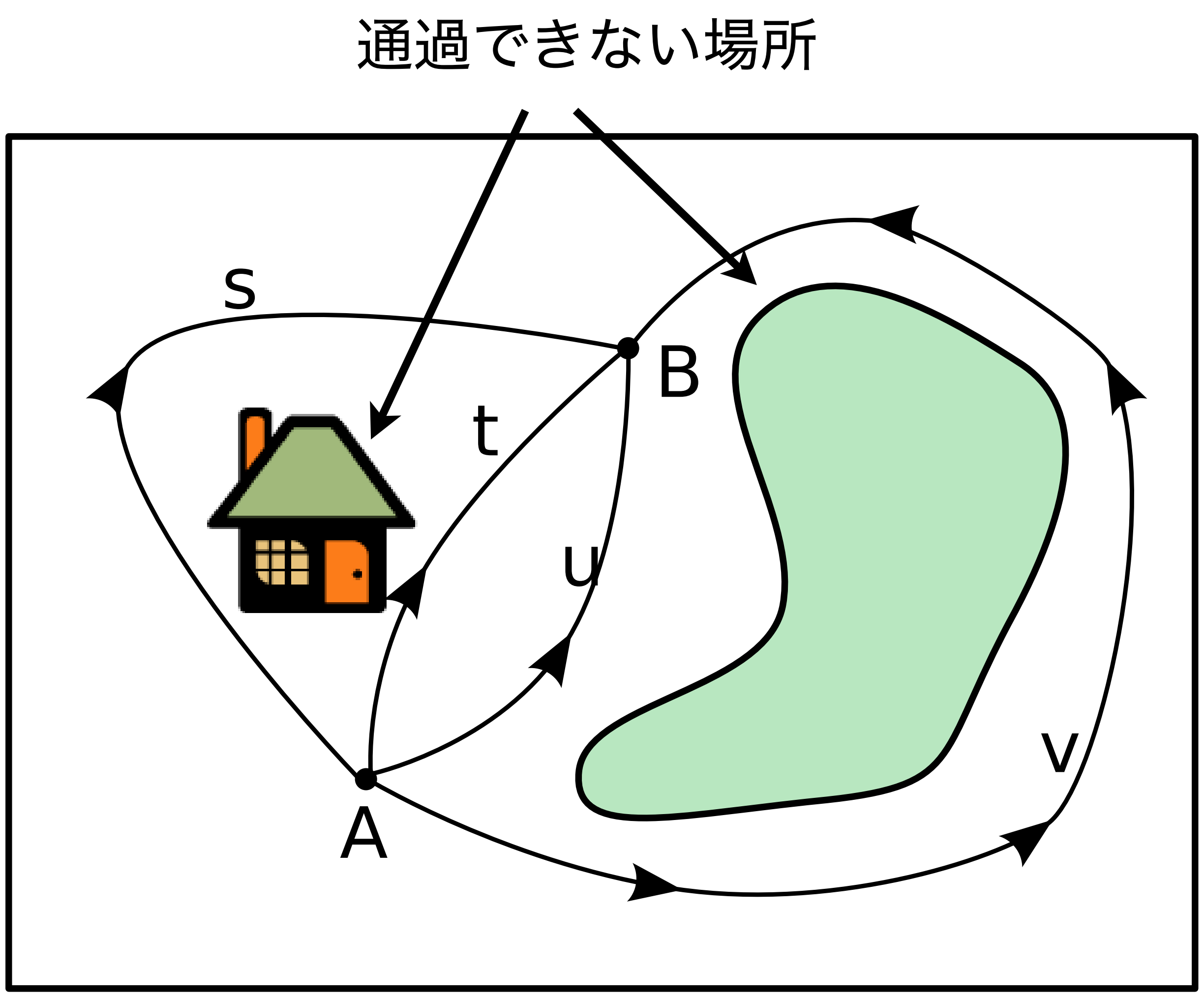
- 前回扱った問題の解説



与えられた図形

AからBへの経路の考え方(1)

- AからBへの経路は，Aを基点とするループを考え，そこから最後にAからBへの経路をかければ良い．



$L_{A,B} = \pi_1(X;A)\ t$

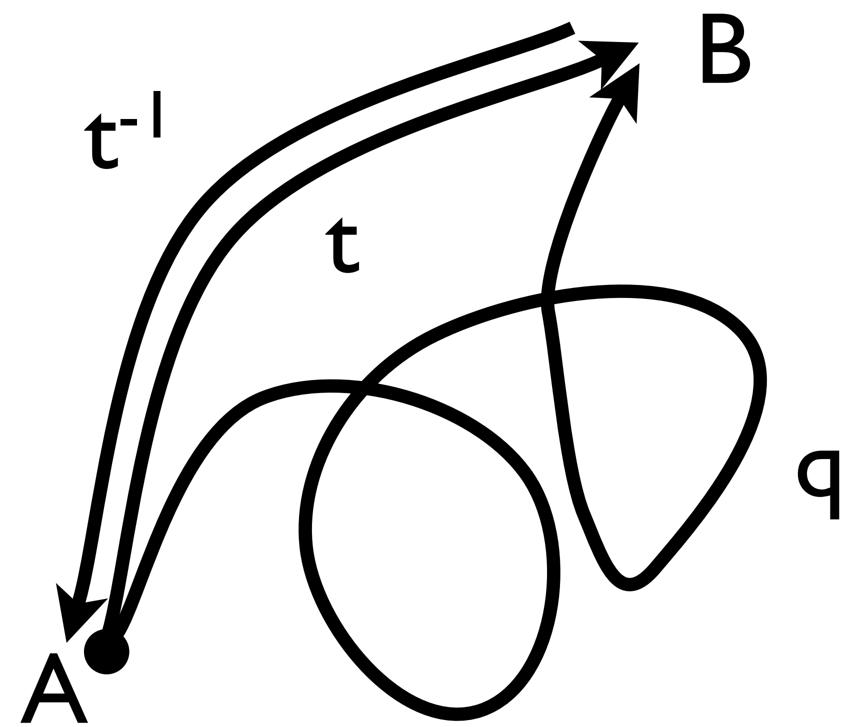
$L_{A,B}$はAからBへの経路の全体

AからBへの経路の考え方(2)

- AからBへの任意の経路をqと置くと

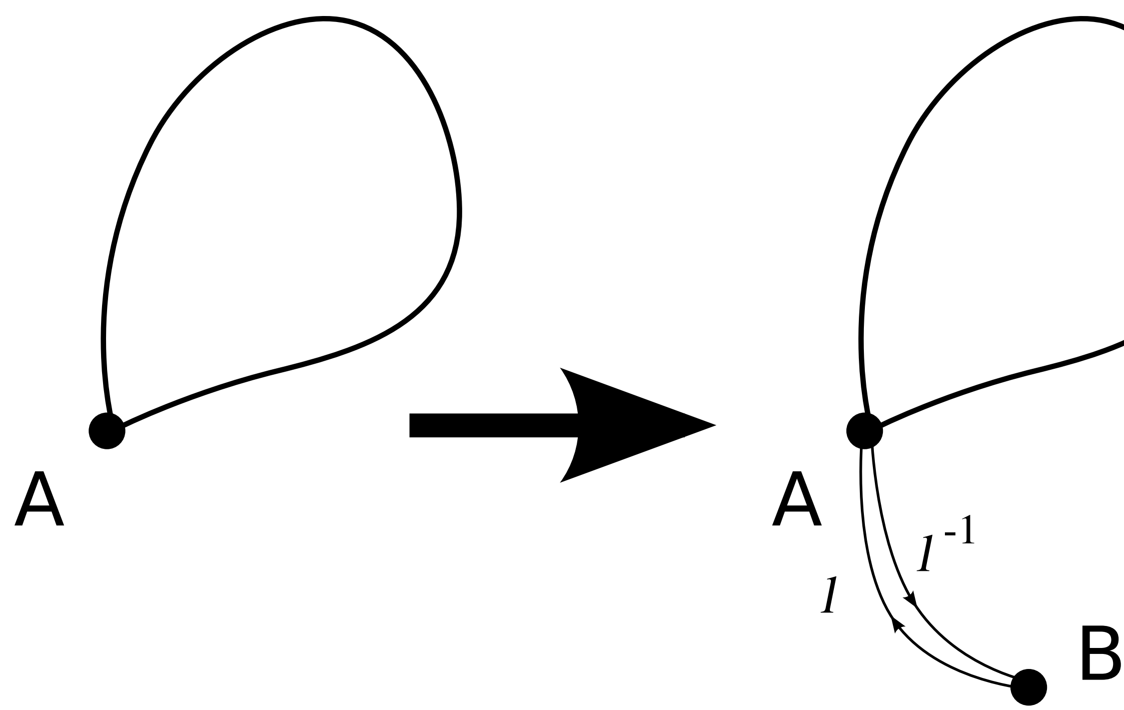
  $q = (q\ t^{-1})\ t$

  と書ける．　$q\ t^{-1}$ はAを基点とするループである．



基本群は基点に依存しない

- 与えられた位相空間Xが連結であれば，Xの基本群は基点の取り方に依存しない.



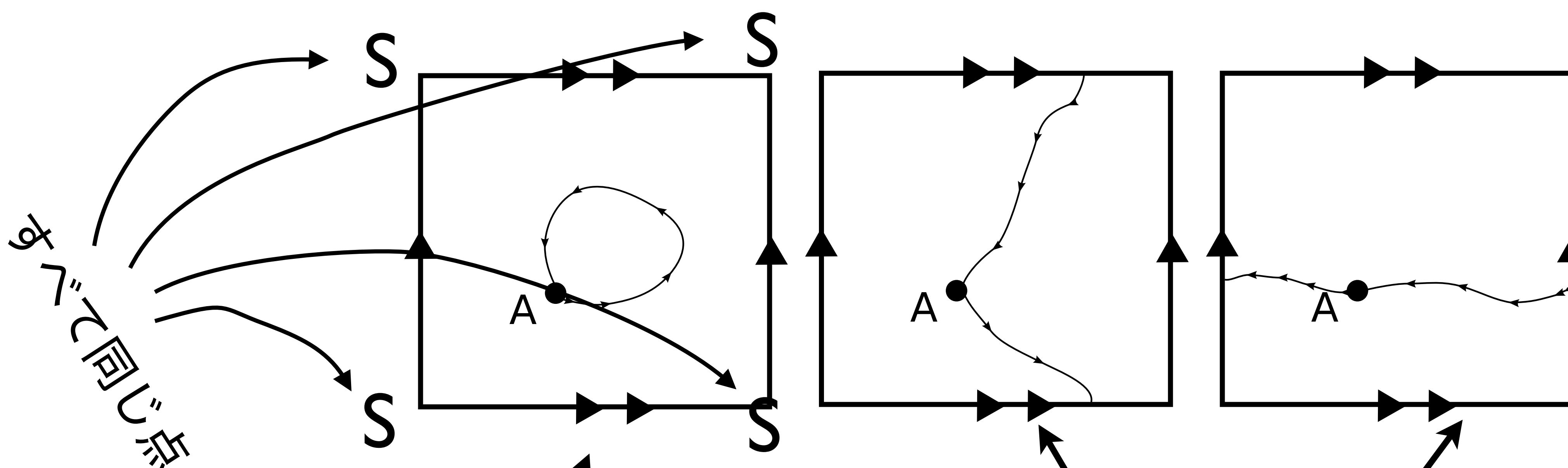
$$l \cdot x \cdot l^{-1}$$

$$l \cdot x \cdot l^{-1} l \cdot y \cdot l^{-1} = l \cdot xy \cdot l^{-1}$$

Aを基点とする基本群とBを基点とする基本群の構造は一致する

トーラスの基本群を考える

- トーラス（ドーナツ形）の基本群を考えてみる.
- トーラスには何種類の基本的なループがあるか？



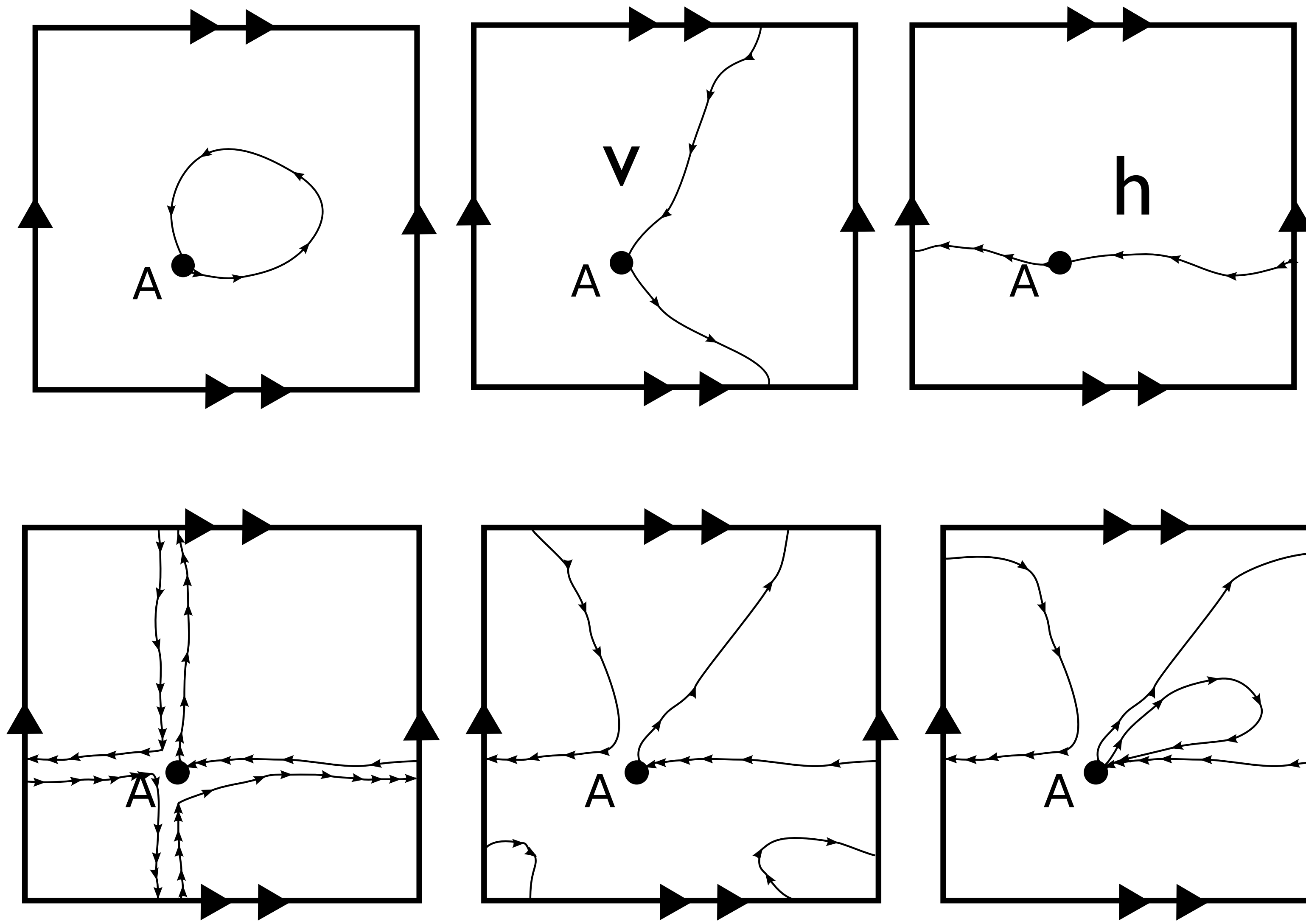
これらのループは互いにホモトープでない

これは一点に集約できてしまう

これらは互いに移り合えない

トーラスの基本群の計算(I)

- 相異なる２つのループをそれぞれv, hとおく

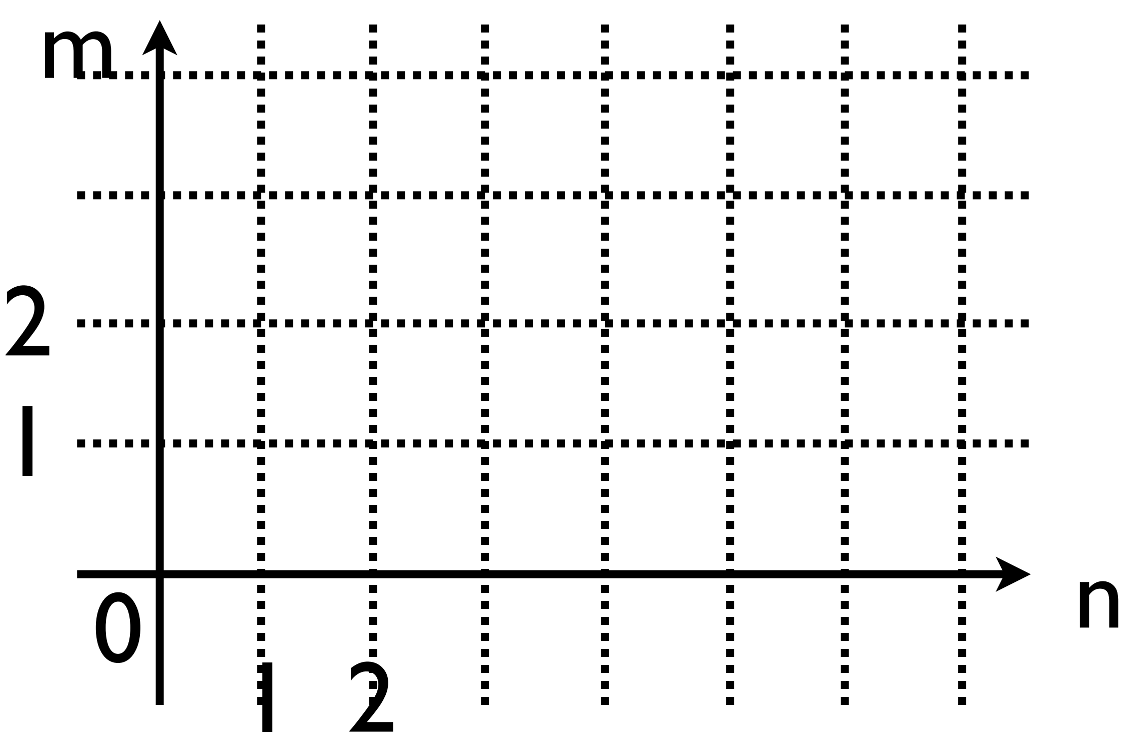


$$v \cdot h \cdot v^{-1} \cdot h^{-1} = e \;\Rightarrow\; v \cdot h = h \cdot v$$

トーラスの基本群の計算(2)

- 基本群はhとvによって生成されるが，hとvは交換するので，結局vの個数とhの個数が問題になる.
- これより，任意の要素は $h^n v^m$ という形になる.
- 基本群は，$\pi(X) = \langle h, v \mid hvh^{-1}v^{-1} \rangle = Z^2$

基本群の要素は平面全体の整数の組（格子点）となる

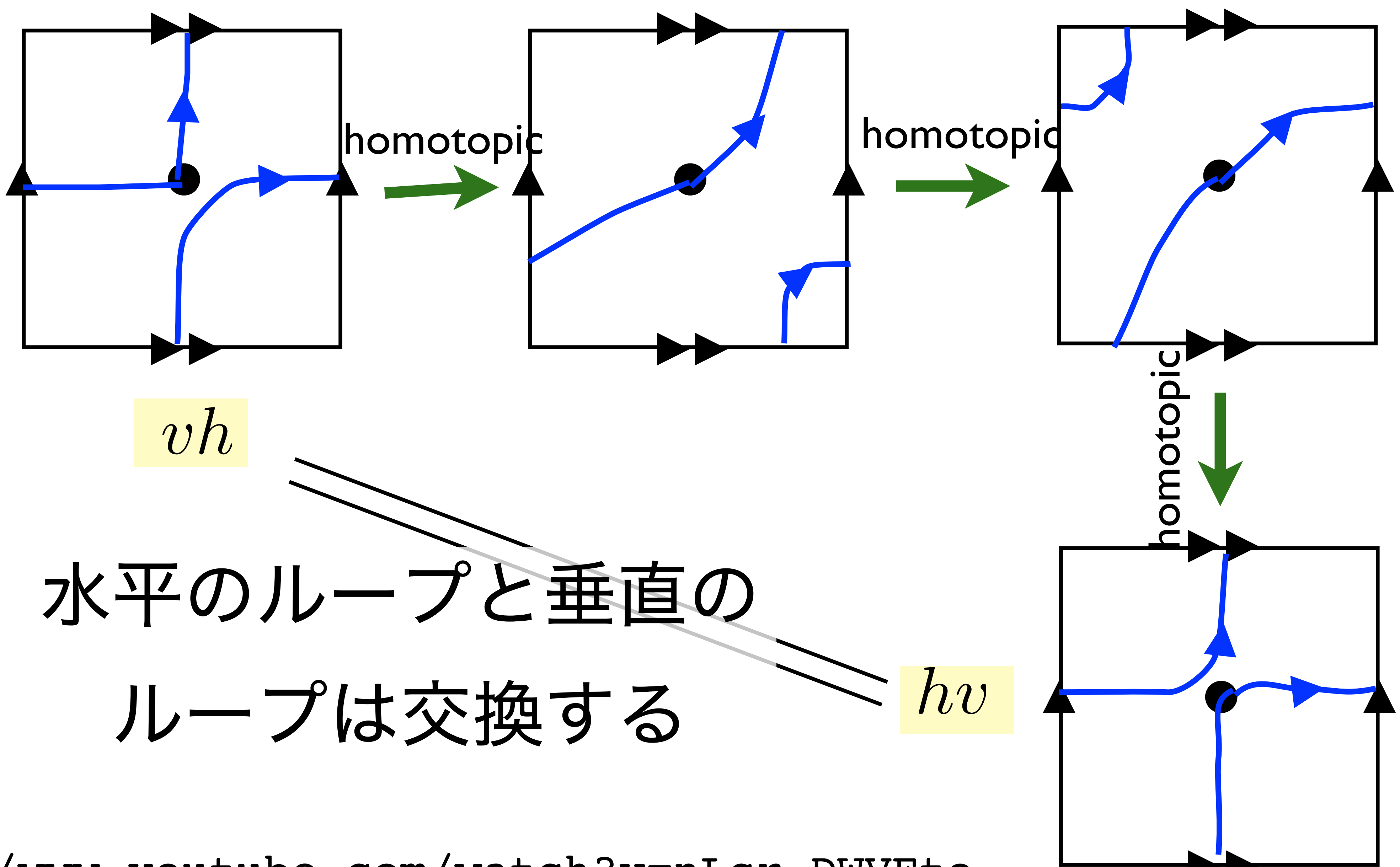


トーラスの基本群の計算(3)

- 別の考え方

v vertical loop

h horizontal loop



水平のループと垂直の
ループは交換する

参考：

http://www.youtube.com/watch?v=nLcr-DWVEto

まとめ

- 基本群はある基点から出発し，その基点に戻ってくるループ全体を集めたものである．ただし，互いにホモトープなループは同じループとみなす．
- 連結な図形の基本群は基点の取り方に依らず，同じ構造を持つ
- 位相同形な２つの図形の基本群は同じ構造をもつ．