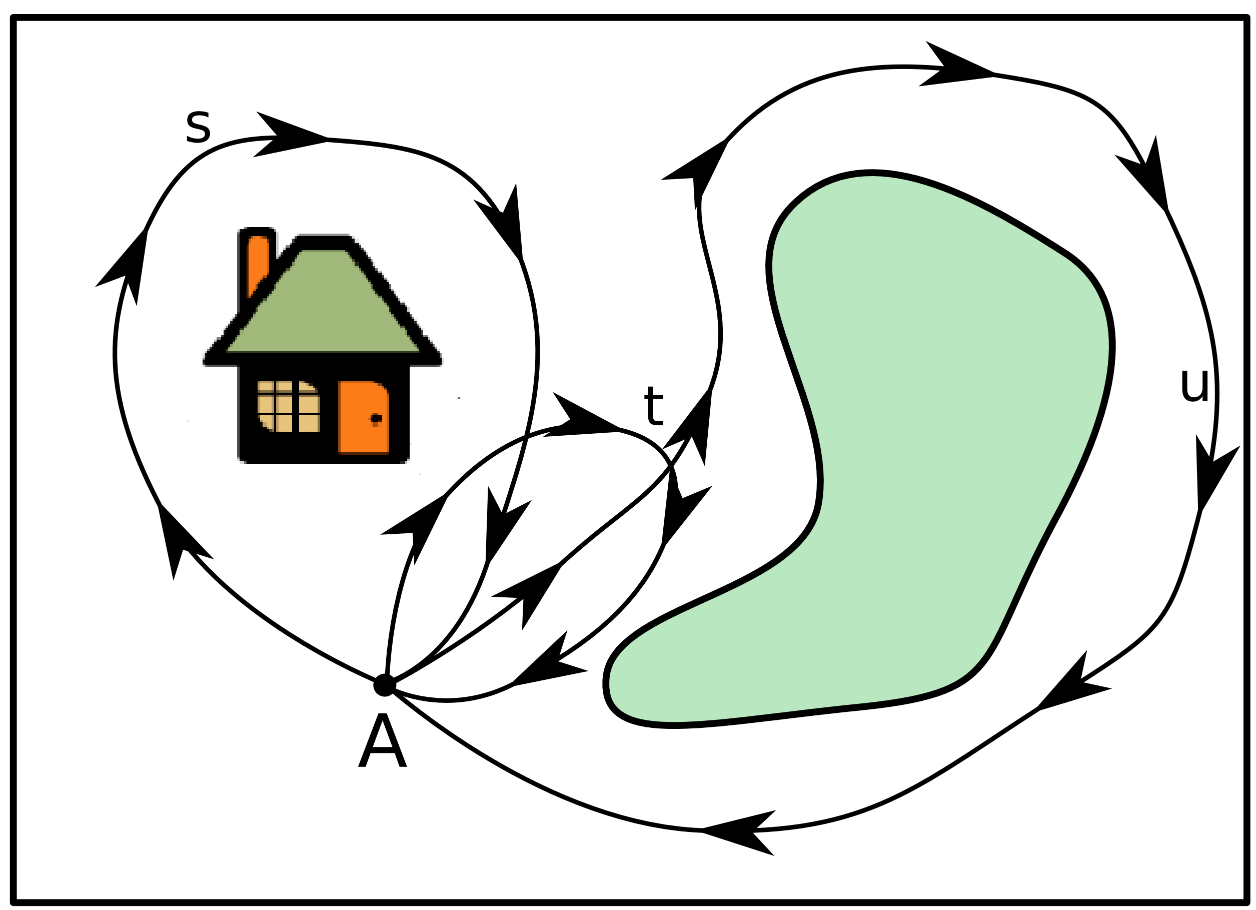
幾何学入門第１４回
色々な図形の基本群

山本修身
名城大学理工学部情報工学科

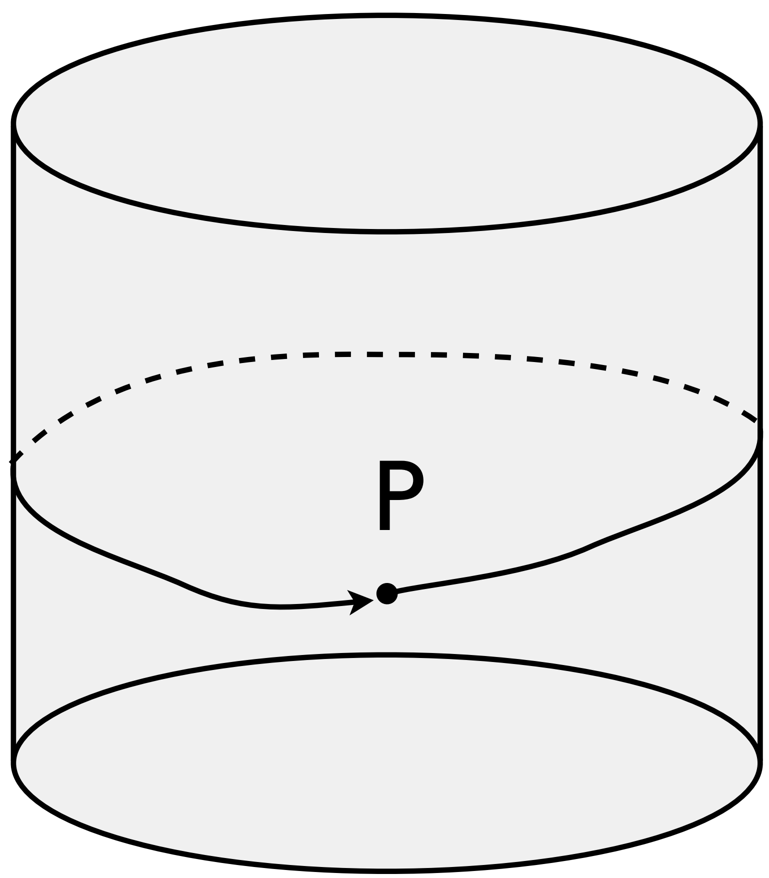
基本群とは（復習）

- 基本群とは，ある基点から出発してその基点に戻っているループの全体である．ただし，ホモトープなループは同一のものとみなす．



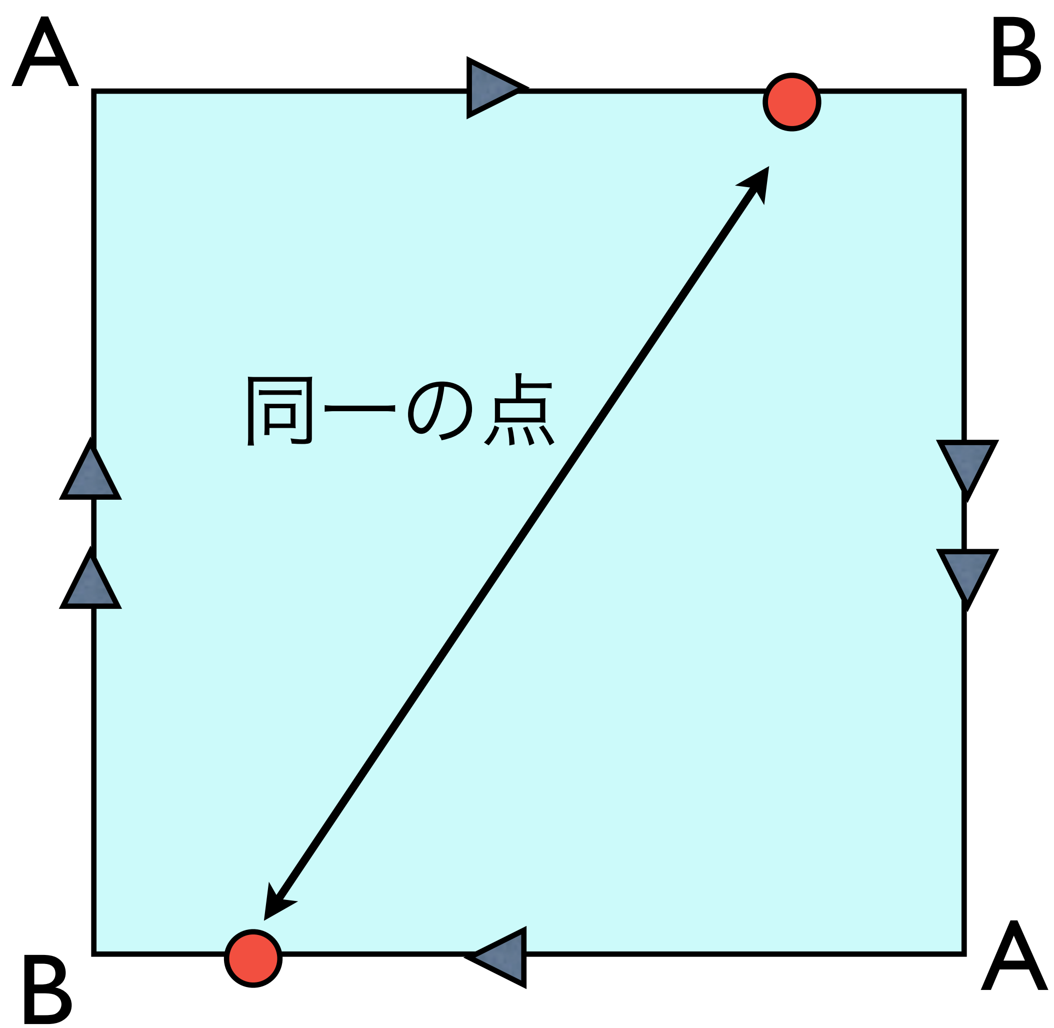
円柱の基本群

- 円柱（底面が除かれているもの）の基本群の要素は基点から出発して何周回ってもとに戻るかによって決定される.

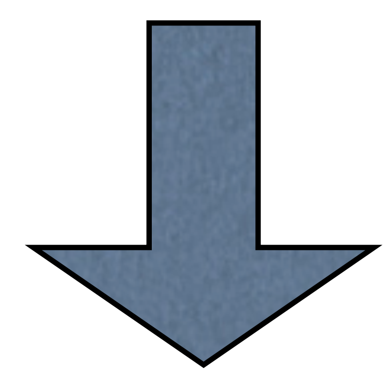


射影平面の復習

- 射影平面は展開図で書くと，４辺の相対する辺を逆向きに貼り合わせたもの.



この世界には端がない

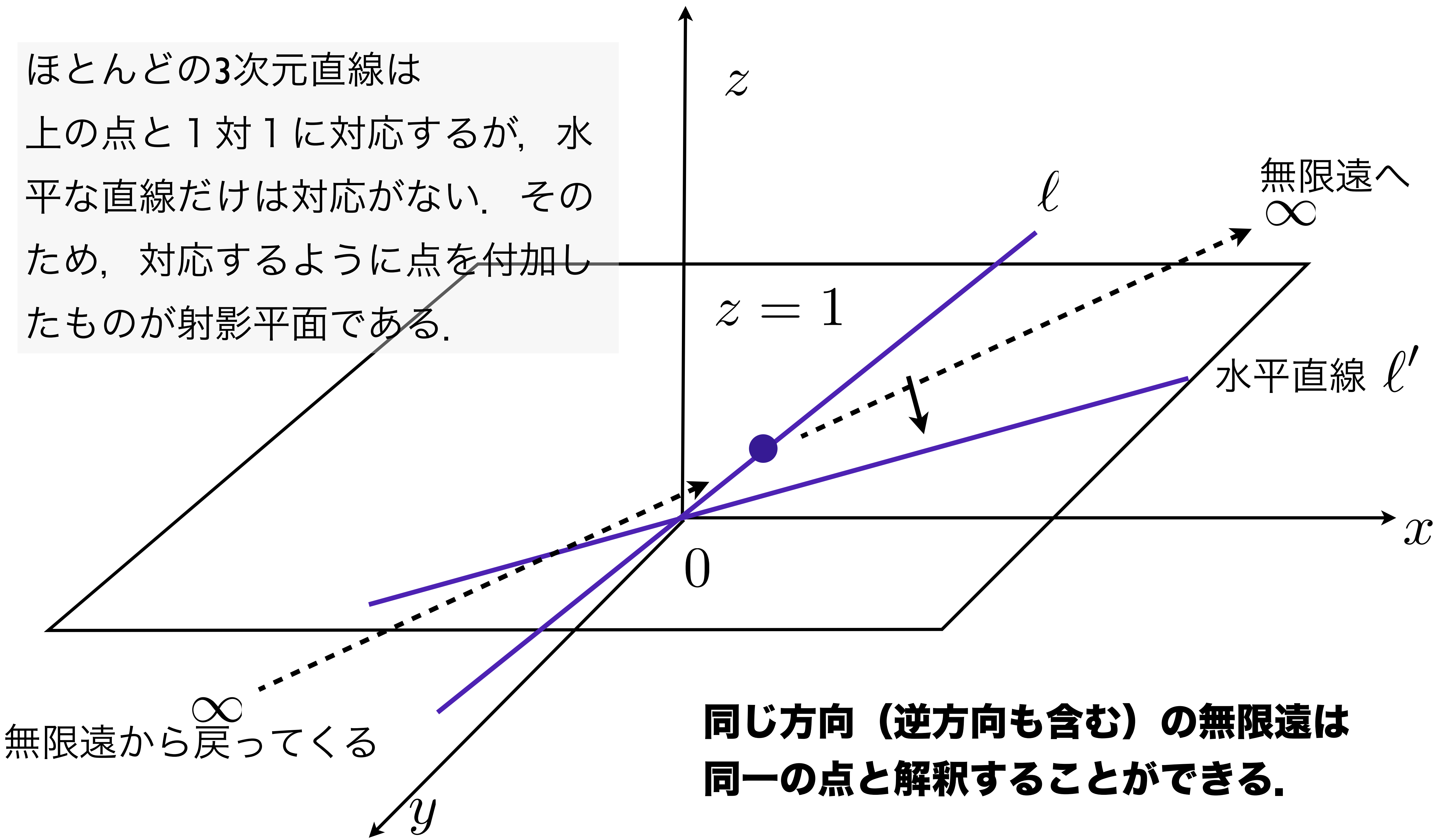


閉曲面

射影平面のイメージ

原点を通る3次元直線と$z=1$の交点を考える

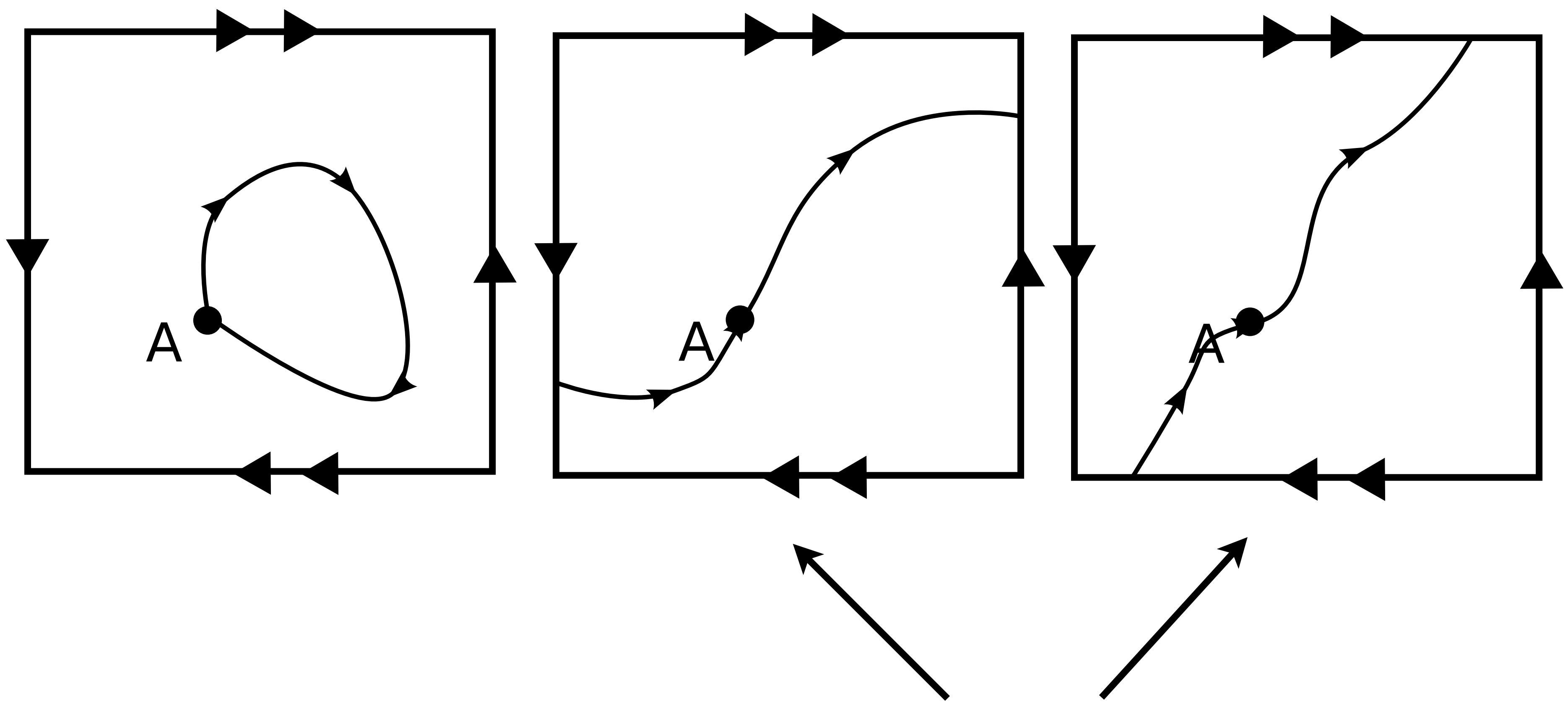
ほとんどの3次元直線は
上の点と１対１に対応するが，水平な直線だけは対応がない．そのため，対応するように点を付加したものが射影平面である．



同じ方向（逆方向も含む）の無限遠は同一の点と解釈することができる．

射影平面におけるループ

- 射影平面におけるループは２種類考えられる

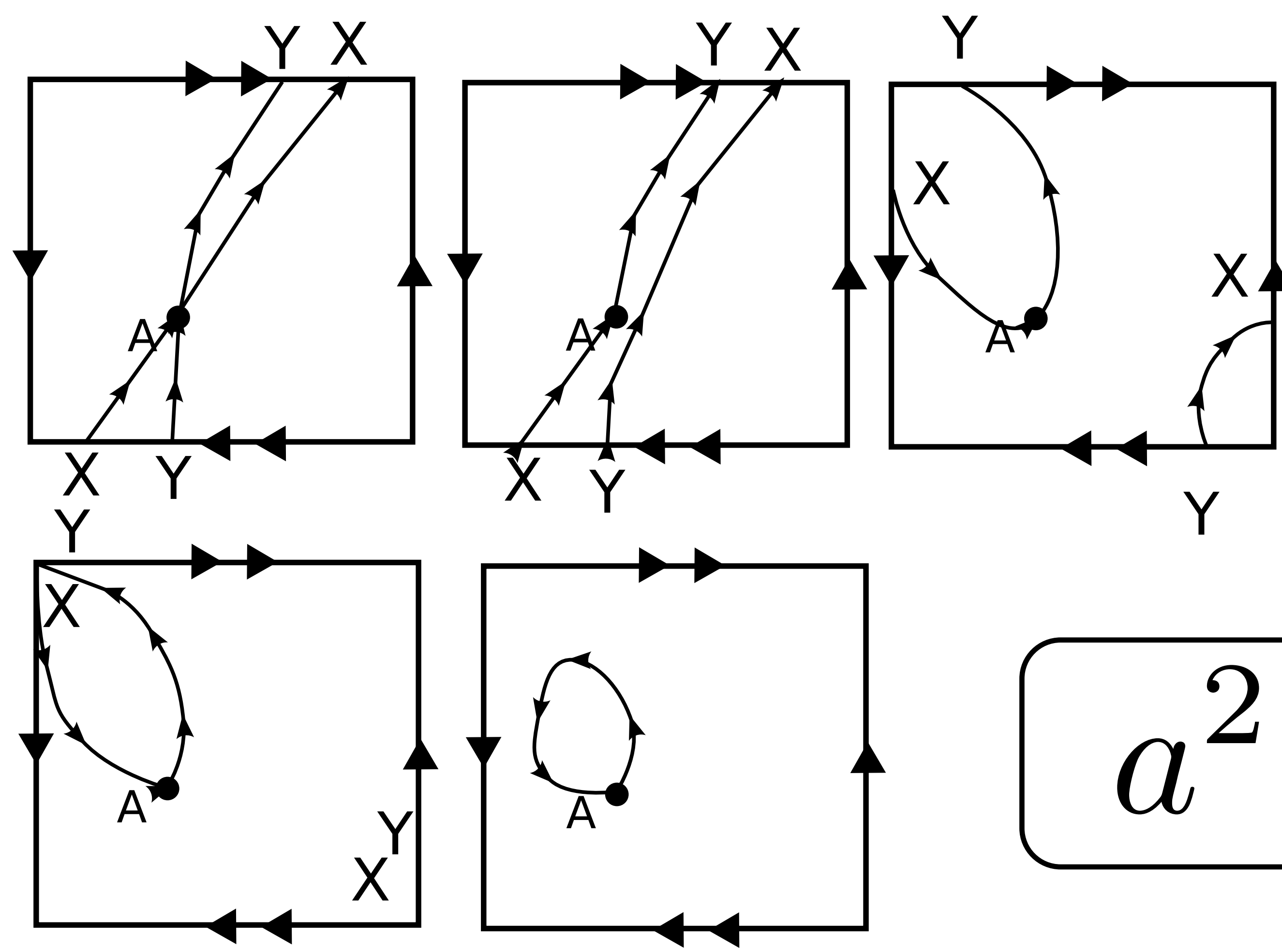


この２つのループはホモトープ

このループをaとおく

a^2を計算してみる

- aにどのような性質があるか調べてみる．もし何もなければ，aを何回続けて回るかによって，基本群要素が決まり，整数と同形な群となるが…



$$\boxed{a^2 = e}$$

ここからの帰結

- 貼り合わせた部分を通るように2回続けて回ると,
  局所的に回るのと同じになってしまう.

$$\boxed{a^2 = e}$$

$$a^{2n+1} = a$$

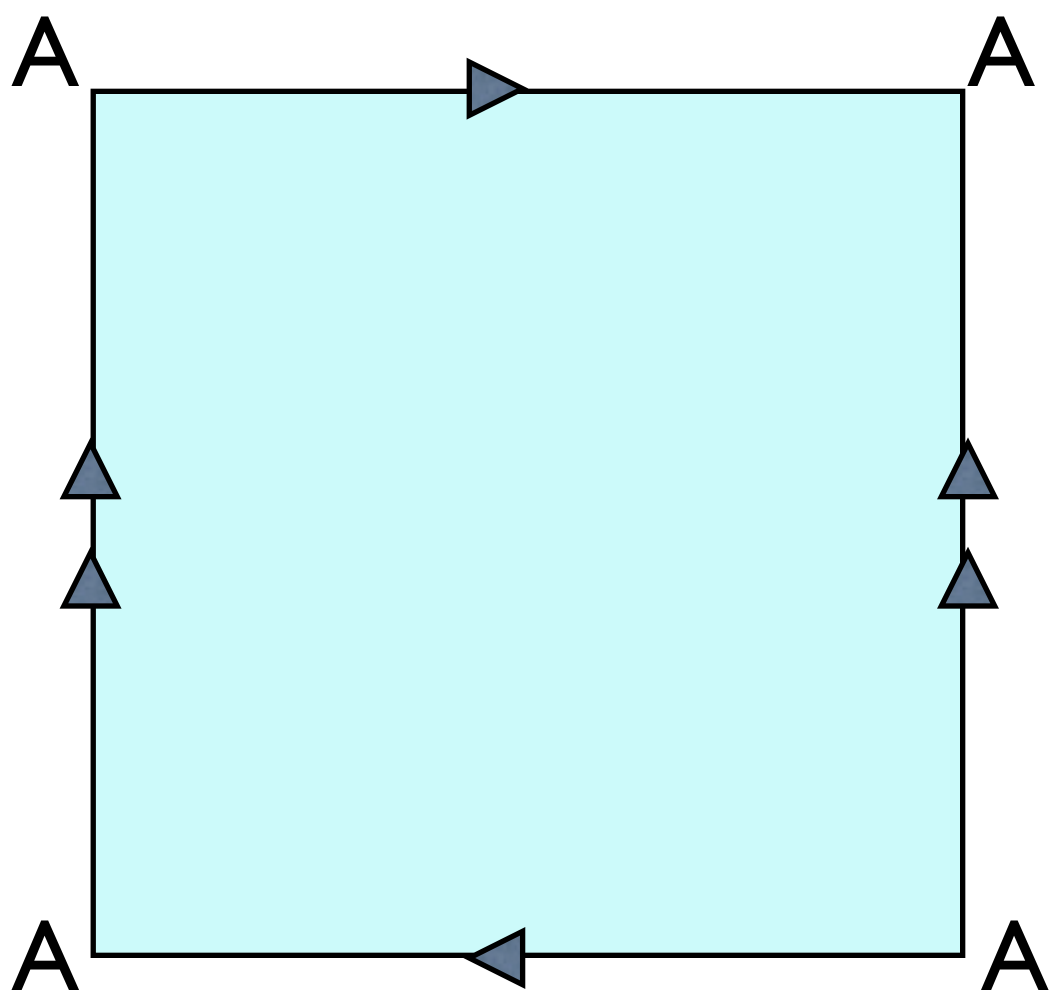
$$a^{2n} = e$$

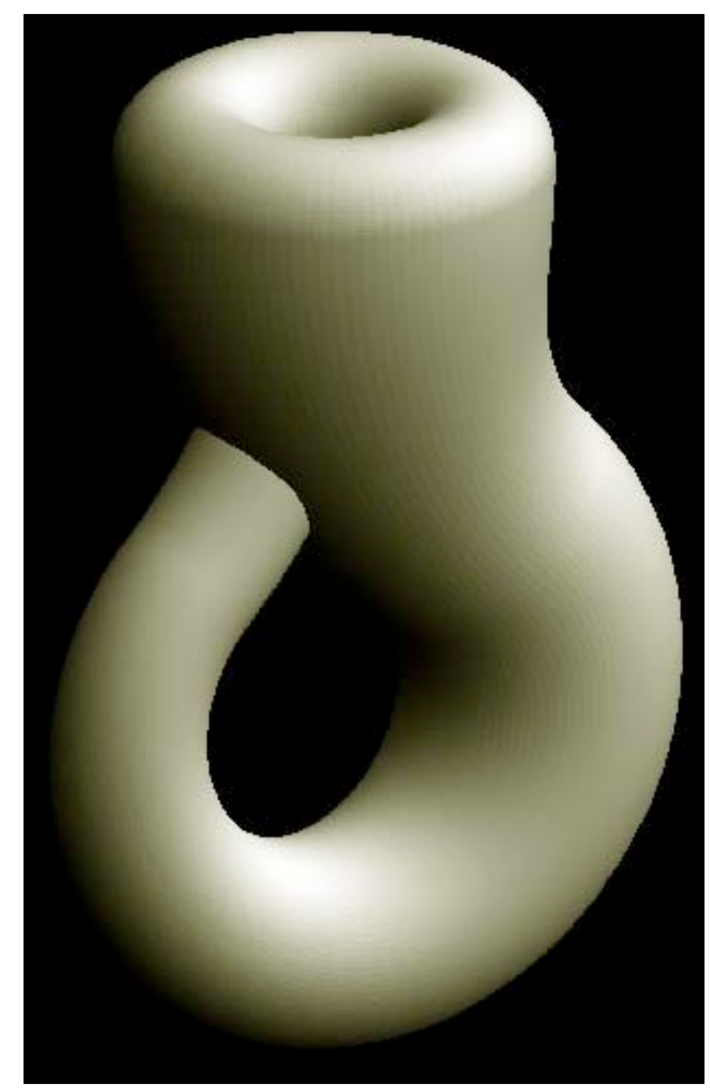
$$\Downarrow$$

$$\underline{\pi_1(X) = \{e, a\} = \langle a | a^2 \rangle}$$

クラインの壷の基本群(I)

- クラインの壷は射影平面と同様に３次元空間で実現できない閉曲面である.



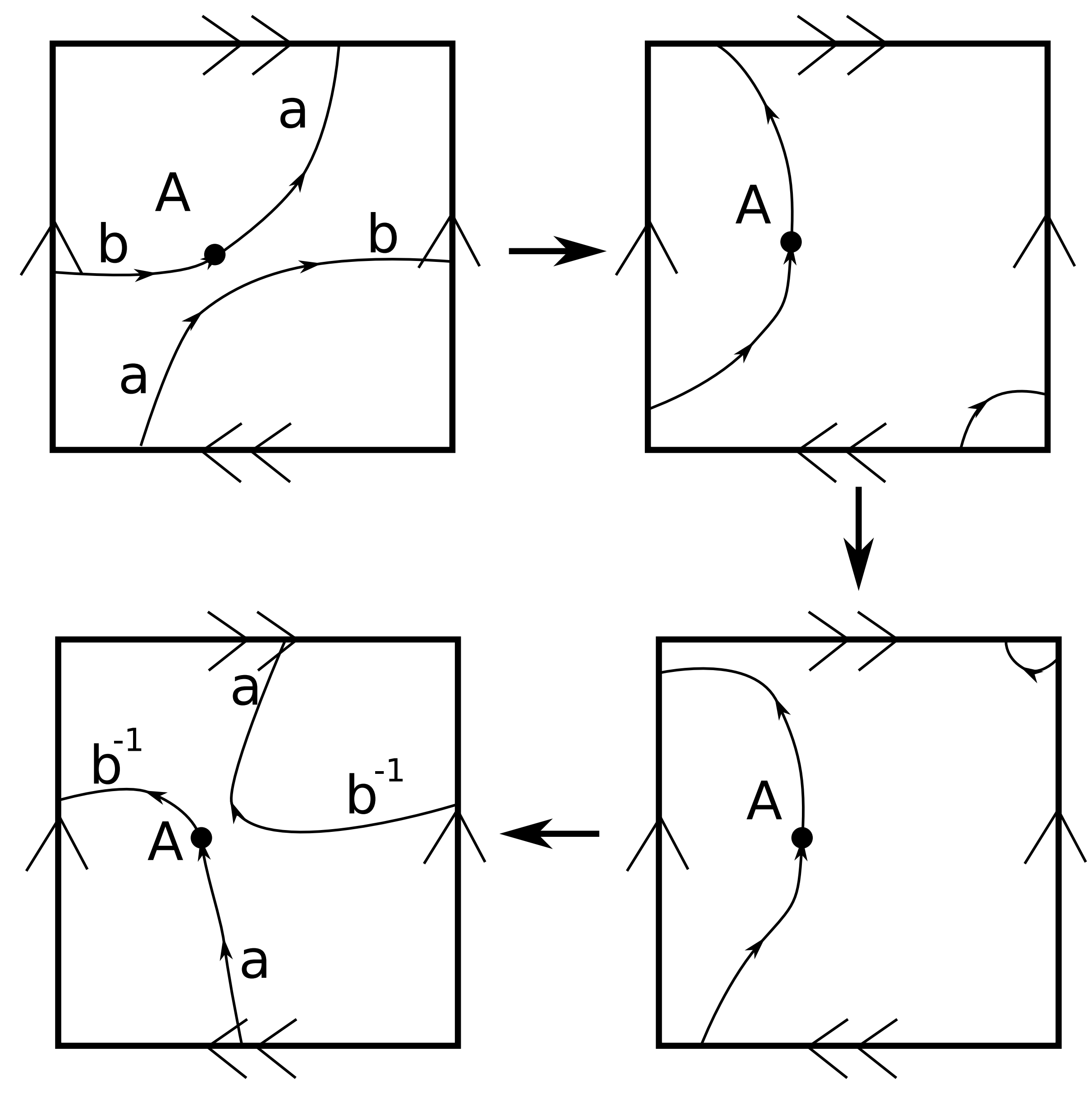


クラインの壷の基本群(2)

- トーラスと同様にして縦の辺と交差するループと横の辺に交差するループは異なる.

$$ab = b^{-1}a$$

$$aba^{-1}b = e$$



クラインの壷の基本群(3)

- 以上の議論からつぎの結果が得られる.

$$\pi_1(X) = \langle a, b | aba^{-1}b \rangle$$

クラインの壷の基本群(4)

- クラインの壷の基本群の一つの表現

$c = ab$ とおく

$$\begin{aligned} a(a^{-1}c) &= (a^{-1}c)^{-1}a \\ c &= c^{-1}aa \\ c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

この群の要素の一般形

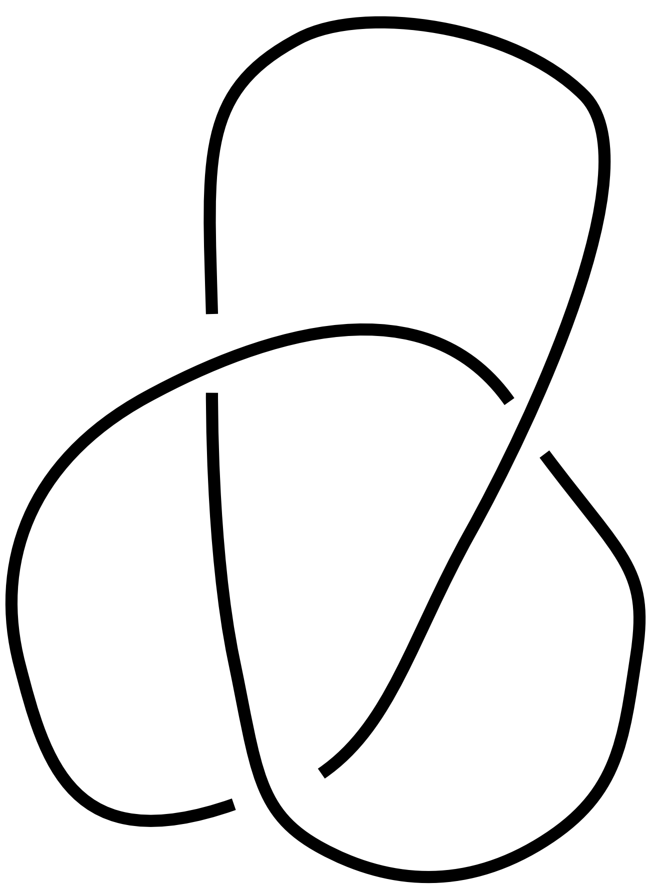
$$ca^{m_1}ca^{m_2}\cdots a^{m_n}c$$

$$G = \langle a, c \mid a^2c^{-2} \rangle$$

基本群による結び目の解析

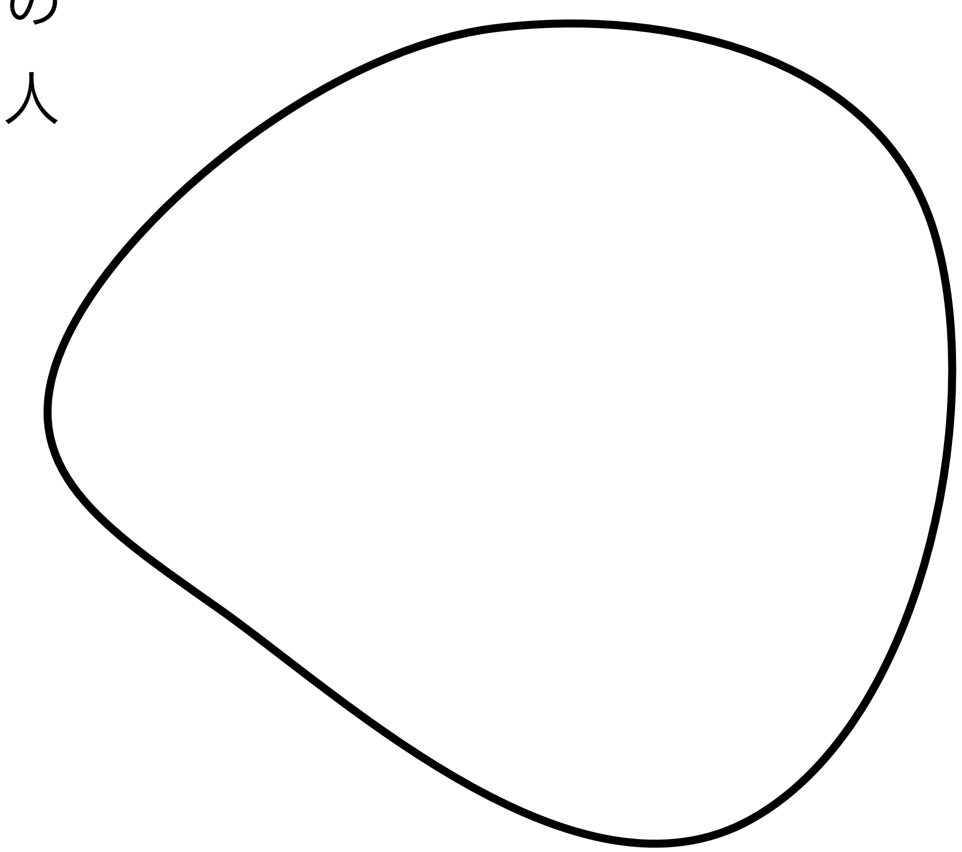
- ３次元空間中の結び目：

２つの図形は位相同形なので
でひもの上に住んでいる人
には違いはわからない



X

図形としては
同相である



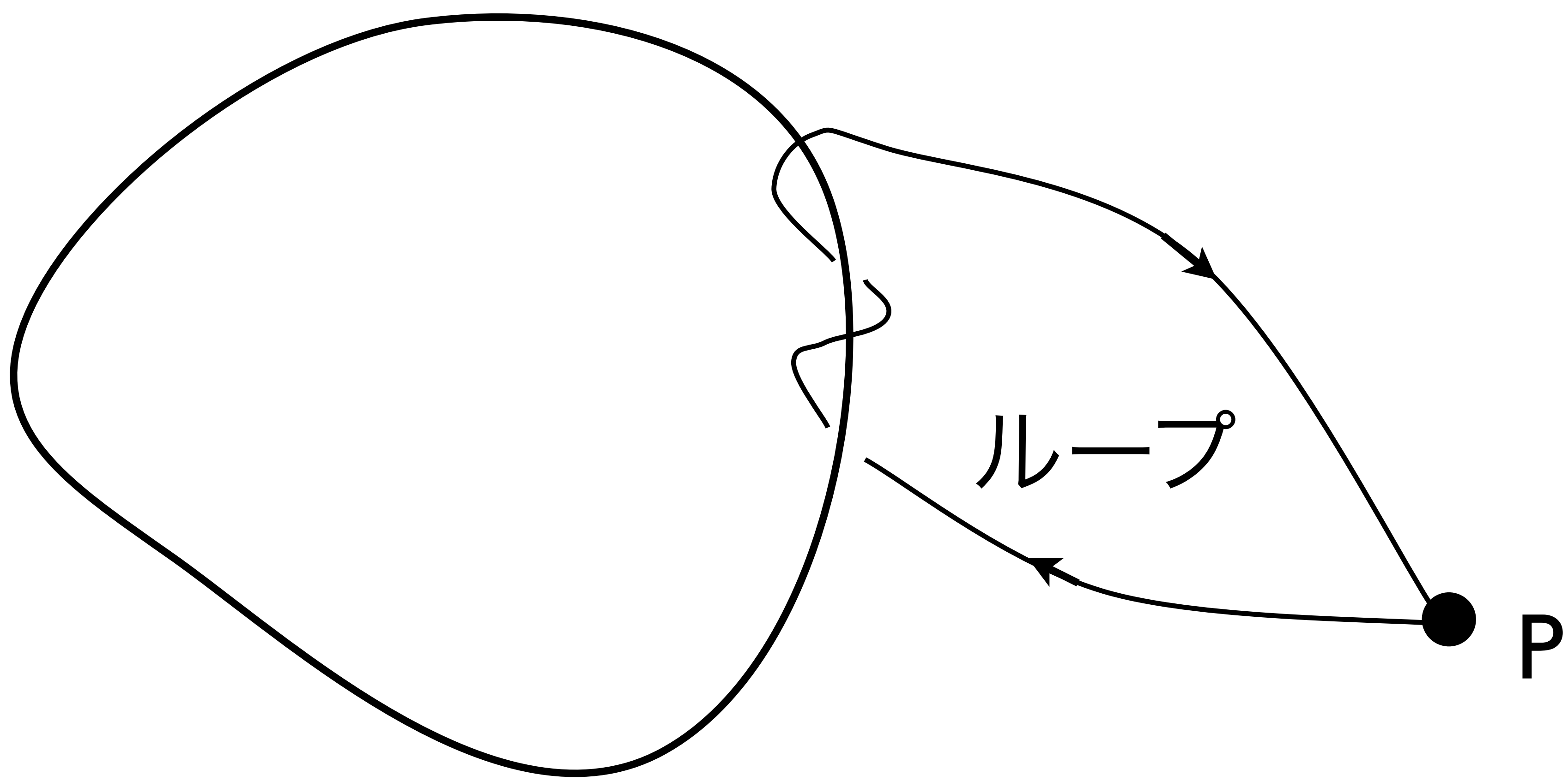
Y

それではどうやって解析するか？

- XとYは位相同形だが，$(R^3\text{-}X)$と$(R^3\text{-}Y)$は位相同形ではない！
- そこで，$R^3\text{-}X$の基本群を計算する．これのことを結び目Xの基本群という．

具体的にどうするか？(I)

- R3の点を基点として，結び目のある位置は通過できないとして，どのようなループがあるかを数え上げる.

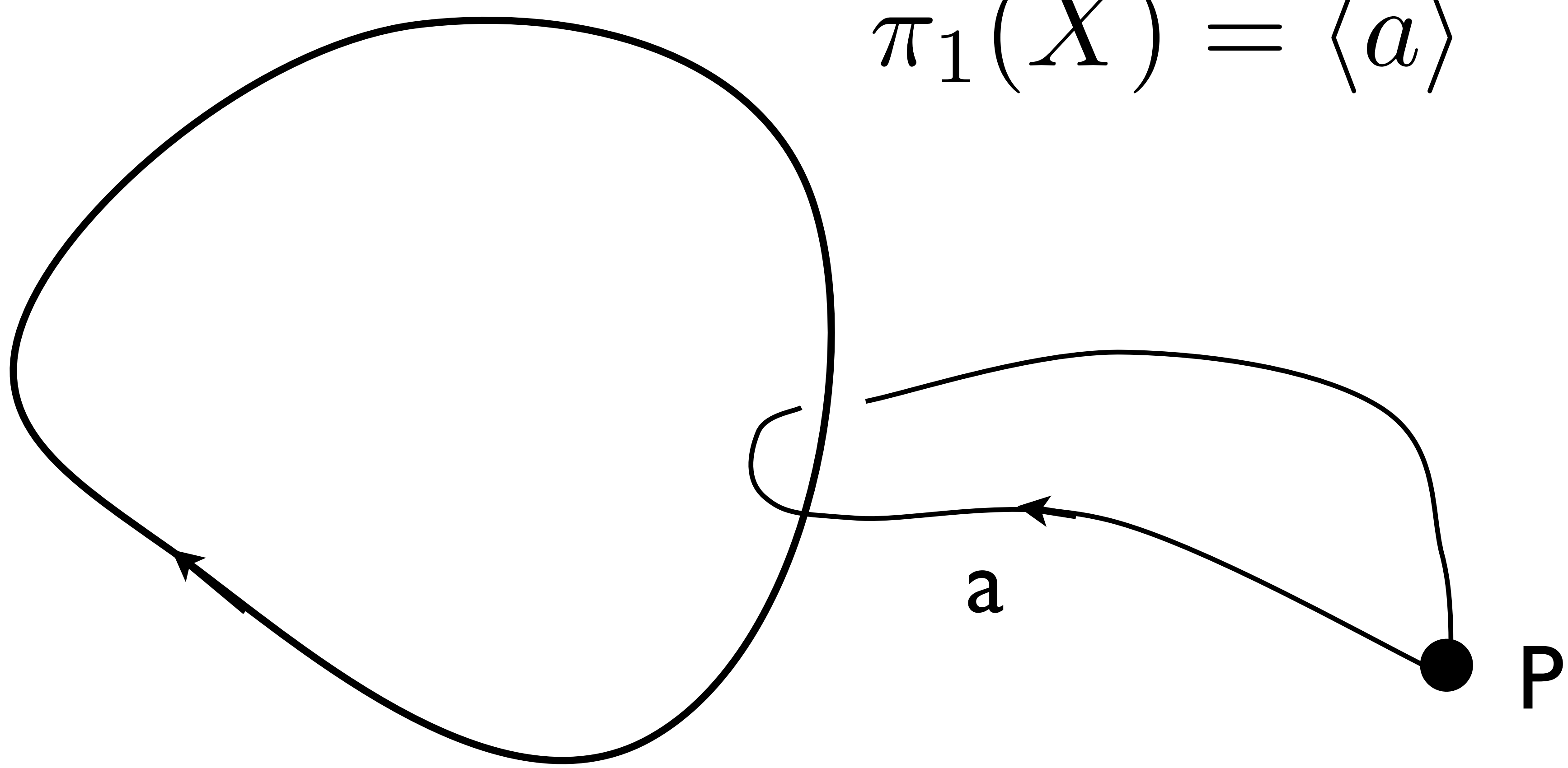


解析対象の結び目

具体的にどうするか？(2)

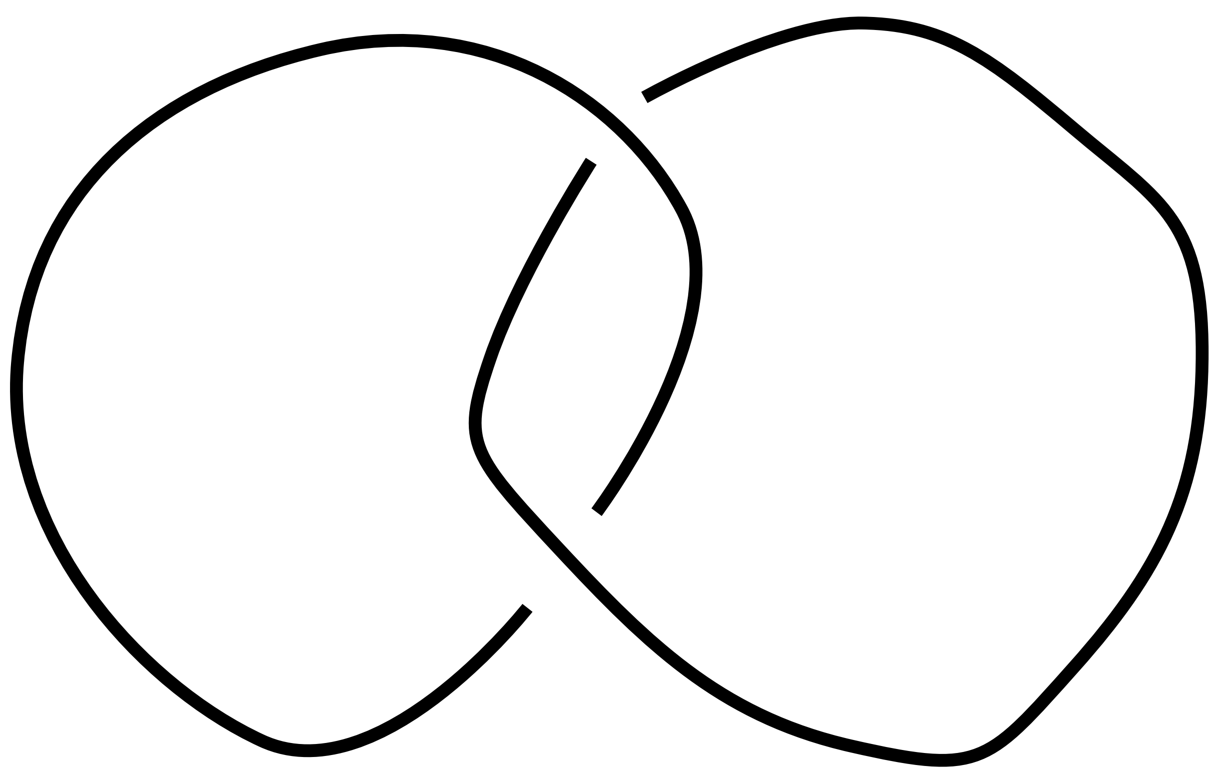
- 対象となる結び目に方向を考えて,

$$\pi_1(X) = \langle a \rangle$$



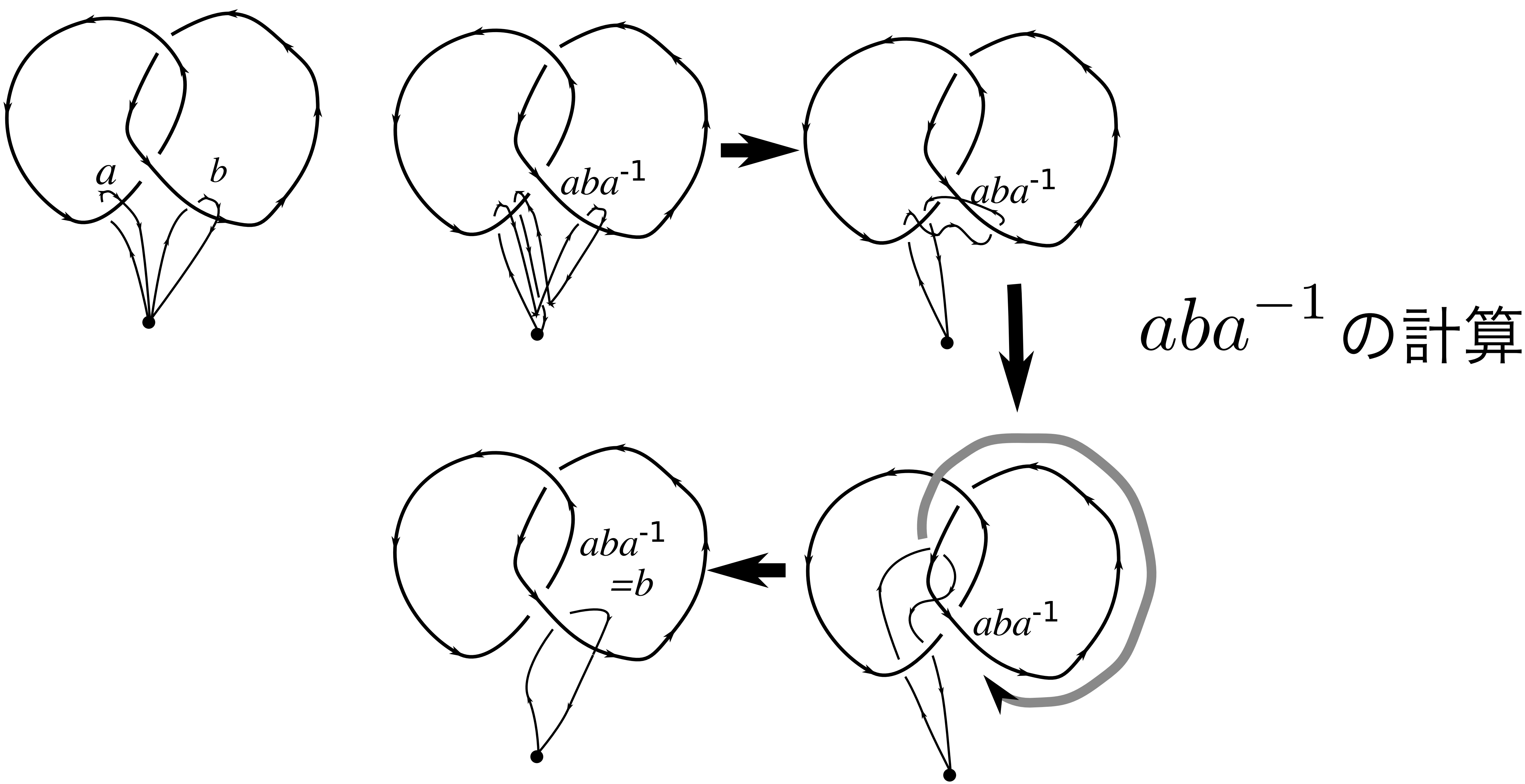
結び目の解析の例(1)

- ２本のひもが絡んでいるものを考える.



結び目の解析の例(2)

- 輪は２つあるので，それぞれを回るループをa, bとおく.



結び目の解析の例(3)

- これより，基本群はつぎのようになる.

$$aba^{-1} = b$$

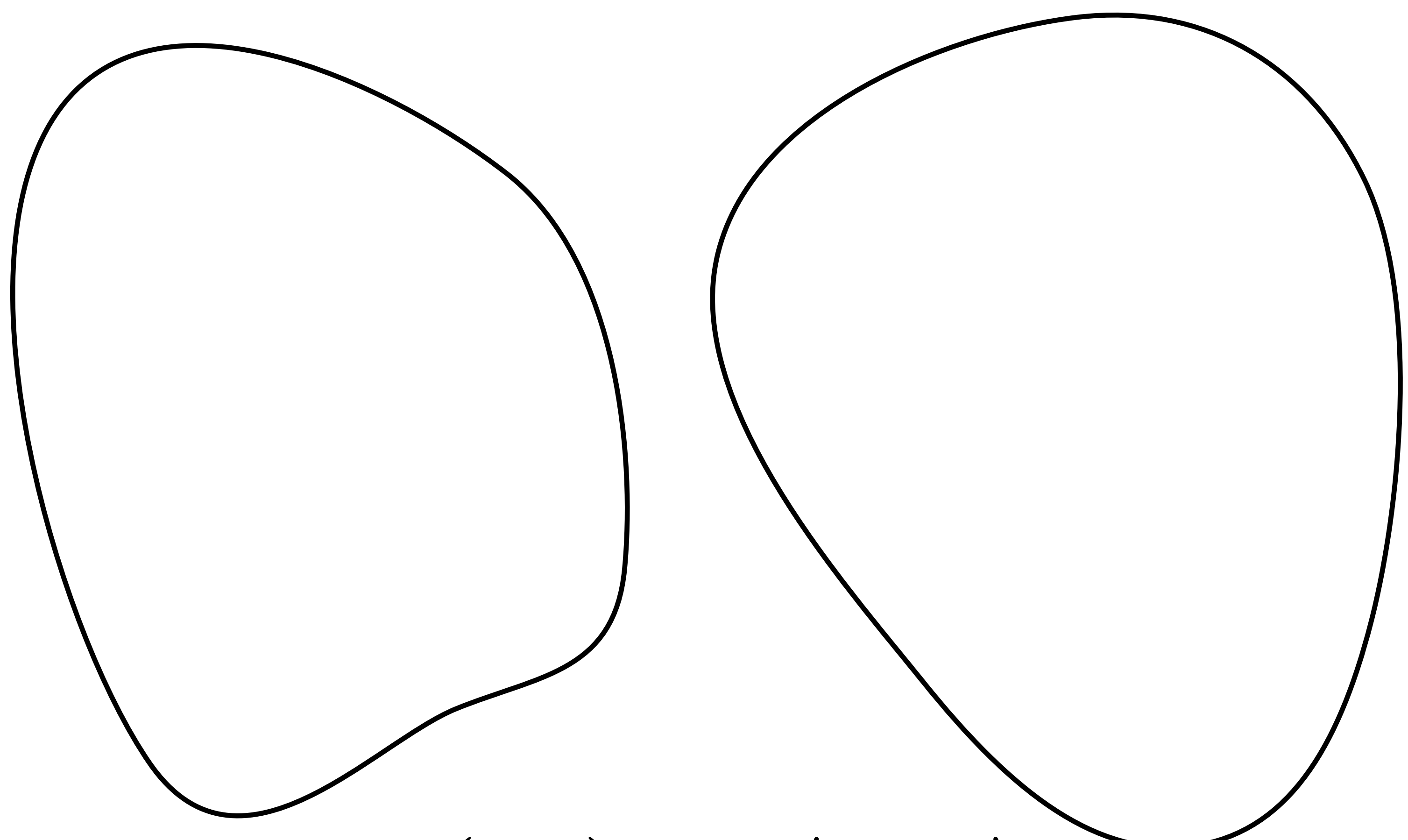
$$ab = ba$$

$$a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \cdots a^{n_k} b^{m_k} = a^{n_1 + n_2 + \cdots n_k} b^{m_1 + m_2 + \cdots m_k}$$

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \langle a, b | aba^{-1} b^{-1} \rangle \\ &= \{ a^n b^m | n, m \in Z \} = Z^2 \end{aligned}$$

別の結び目では...

- この結び目では



$$\pi_1(X) = \langle a, b \rangle$$

自由群

まとめ

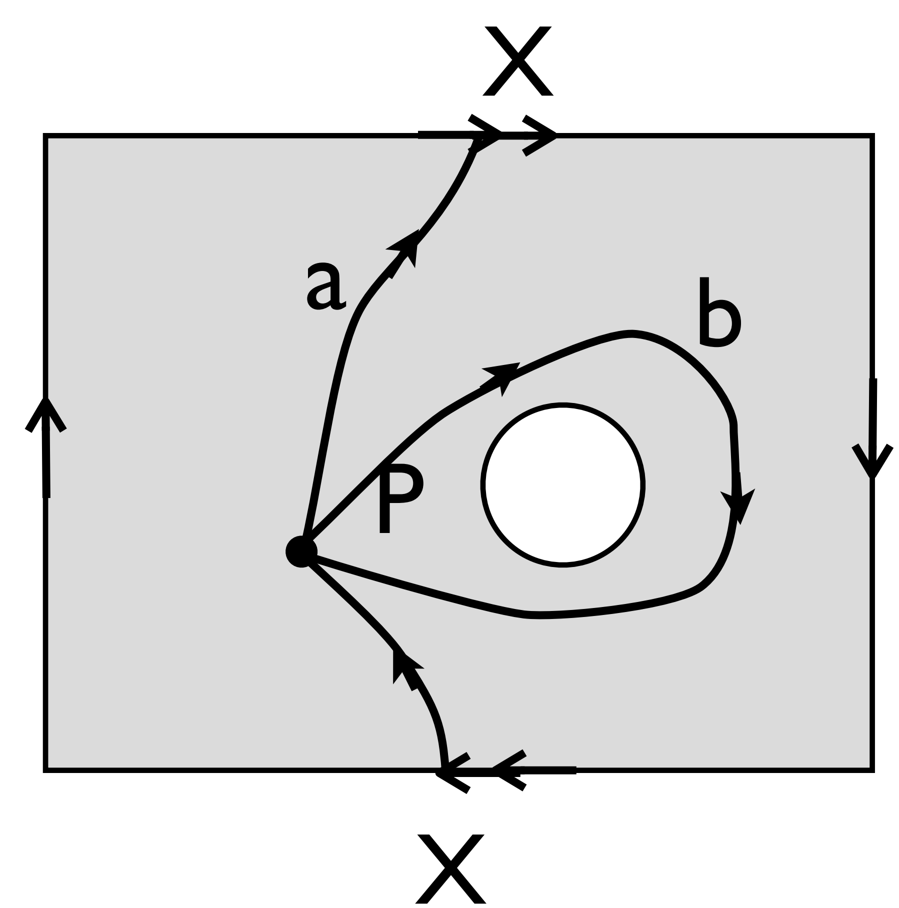
- いくつかの閉曲面について基本群を計算した
- いくつかの結び目について基本群を計算した．教科書では機械的に基本群を求める方法について解説されている.

練習問題

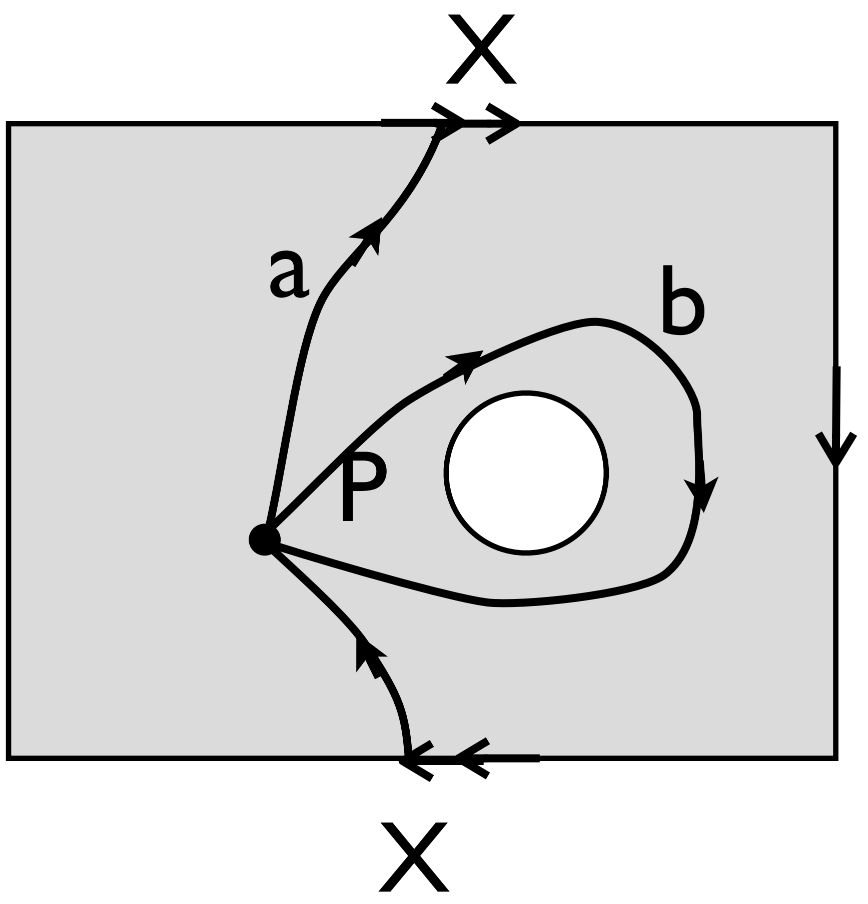
以下のような射影平面から円盤を取り除いた図形について以下の問い答えよ.

1. 基点Pを出発してPへ戻るループaおよびbについて, $a^2 = b$ であることを示せ. 【ヒント：$a^{-1} b = a$ を示せば良い】

2. この図形の基本群を求めよ.



射影平面から円盤を抜くとメビウスの輪になることを思い出そう


X
a
b
P
X