幾何学入門第１５回
まとめ

山本修身
名城大学理工学部情報工学科

集合＋構造

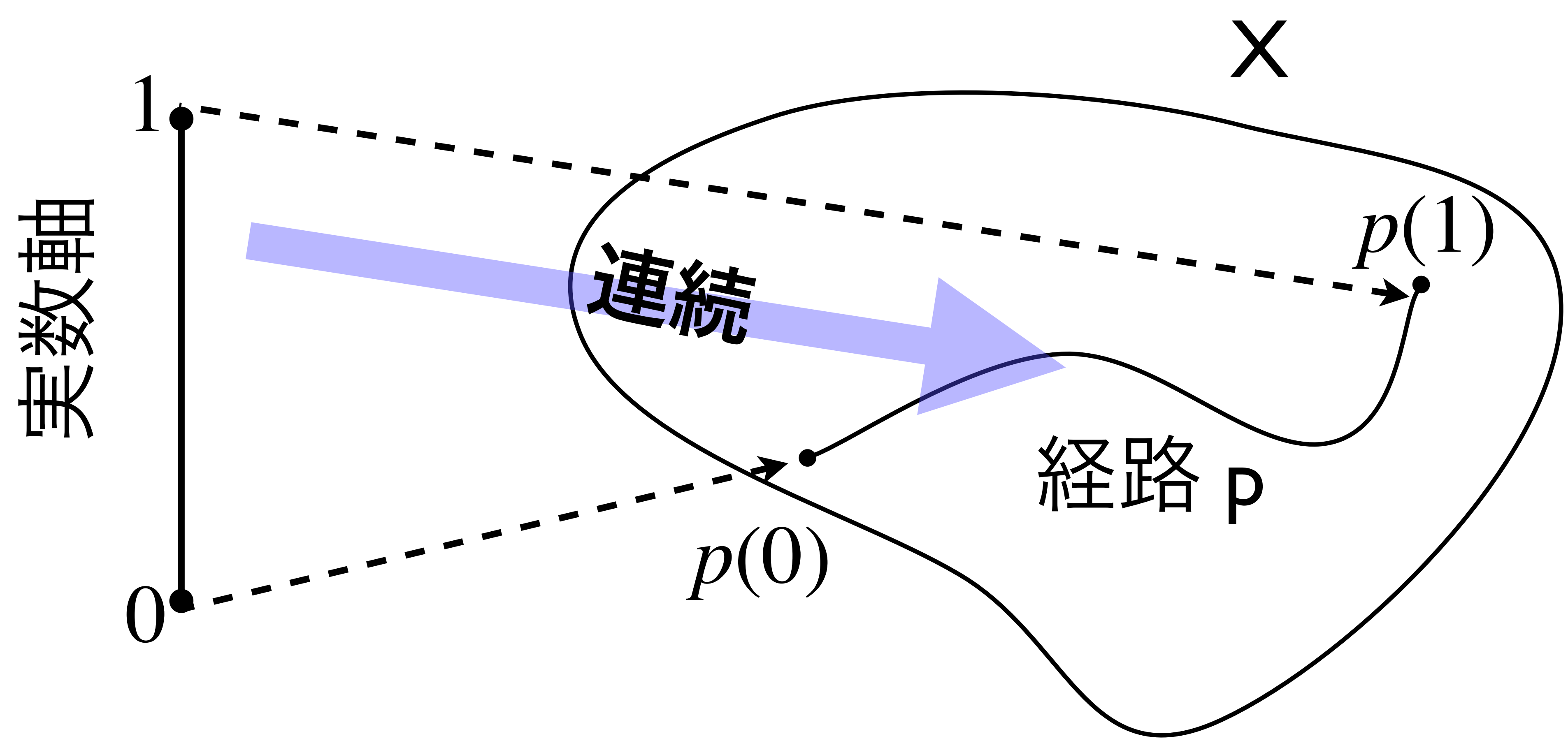
- 数学で研究する多少は多くの場合，集合とその集合に関する制約（構造）によるものが多い．位相幾何学の場合には集合＋位相（開集合）によってその性質を規定する．
- 位相幾何学では開集合，写像における連続性（これも開集合によって定義される）が道具として利用される．

形式的な定義：経路とは

- まず，経路を定式化する．

pは連続写像である

$$p : [0, 1] \longrightarrow X$$



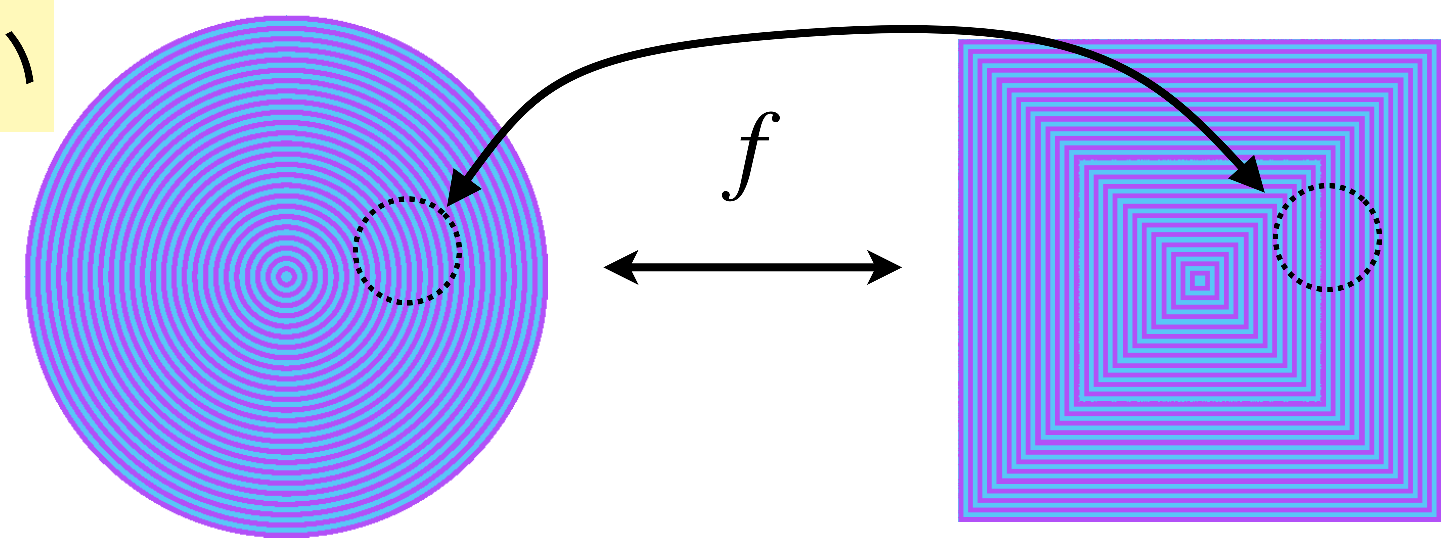
位相同形とは

- ２つの位相空間（図形）X, Yが位相同形であるとは，XからYへの写像fが存在して，f, f^{-1}が連続な１対１の写像であることである．

双方向連続

$$(x, y) \mapsto (X, Y)$$

飛びがない



$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \{(x, y) \mid |x|, |y| \leq 1\}$$

$$(X, Y) = \sqrt{x^2 + y^2)}(1, y/x)(y > x)$$

位相幾何学とは

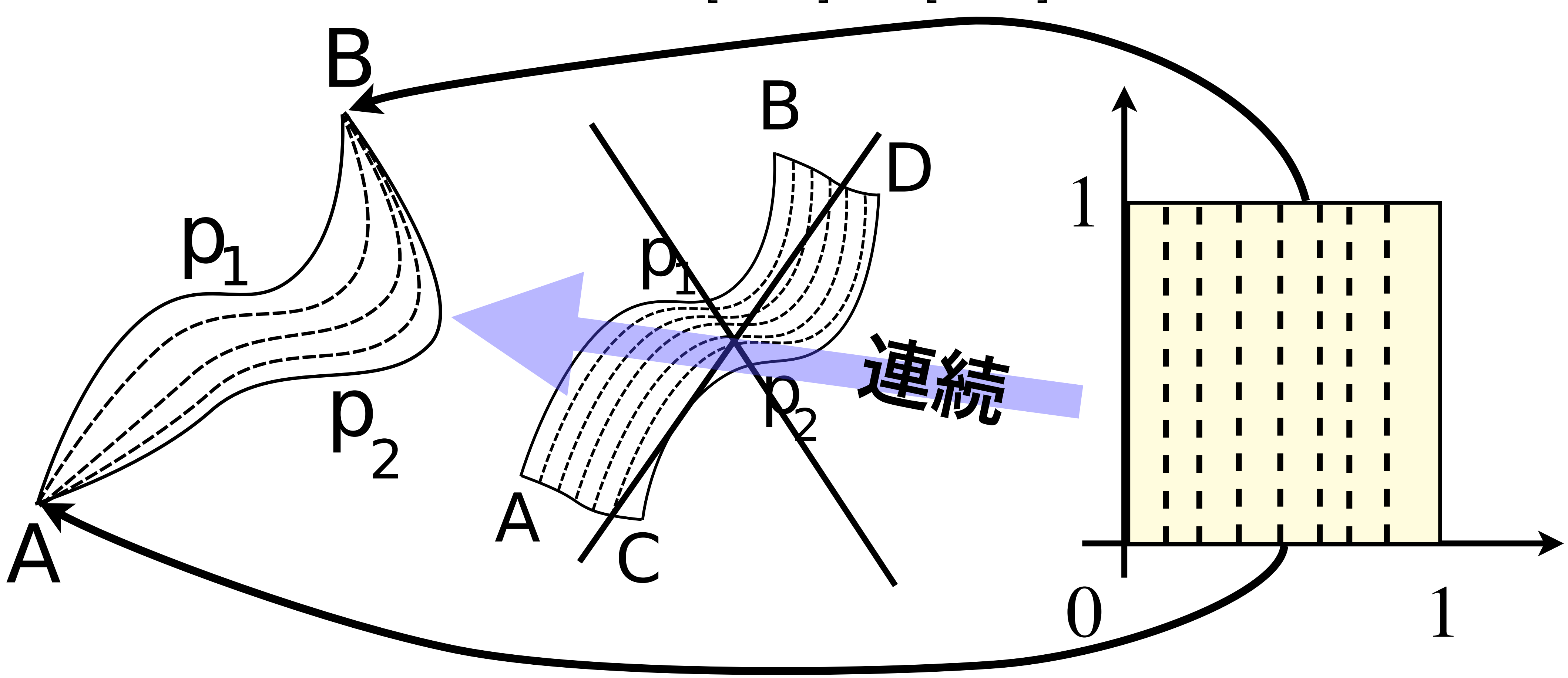
- 位相幾何学とは位相同形な図形に共通する性質について研究する数学の一分野である.
- 位相同形な図形はすべて同じ図形であると考える.

形式的な定義：ホモトープ性

Fは連続写像である

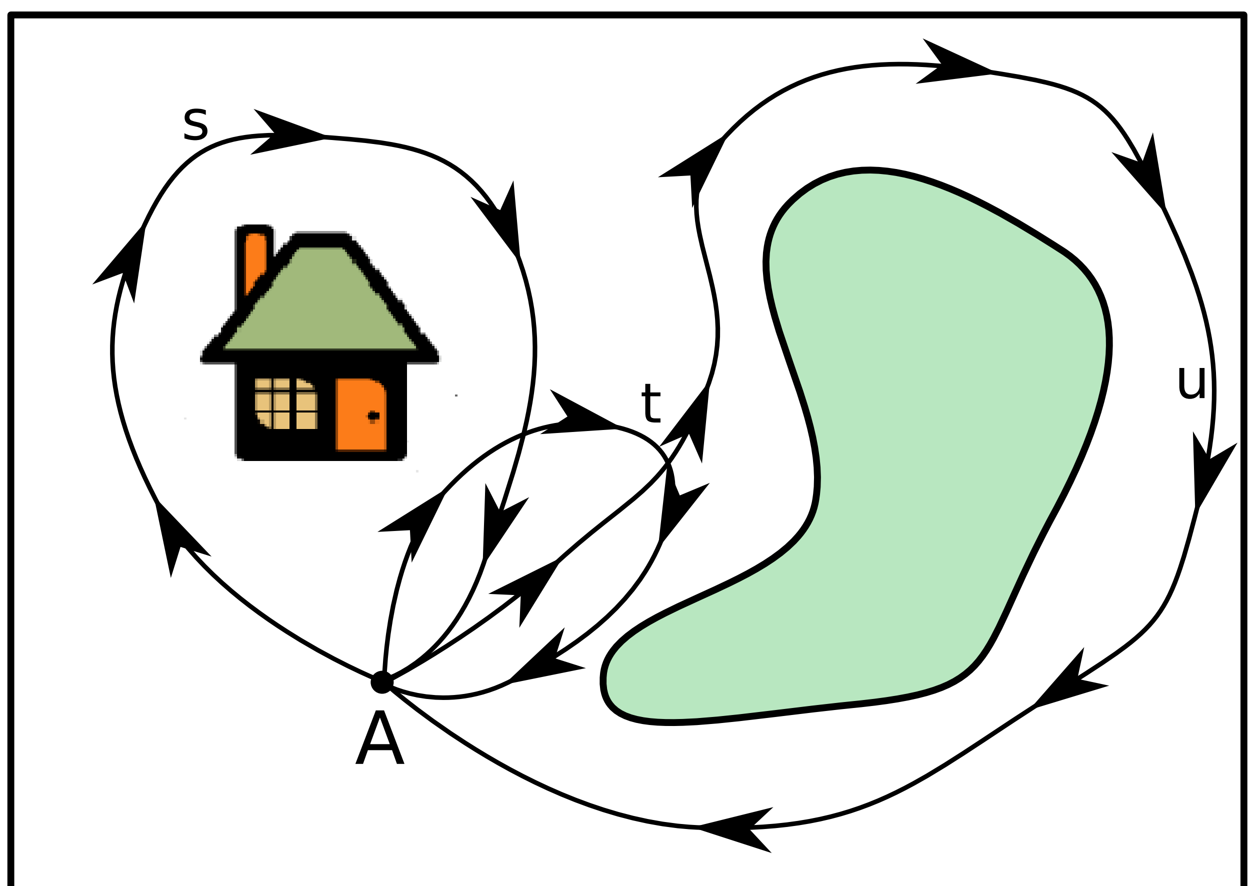
- 一般のホモトピーは経路の始点や終点を一致させる必要がないと，ここでは基本群を考えるので始点や終点は固定する．

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X$$



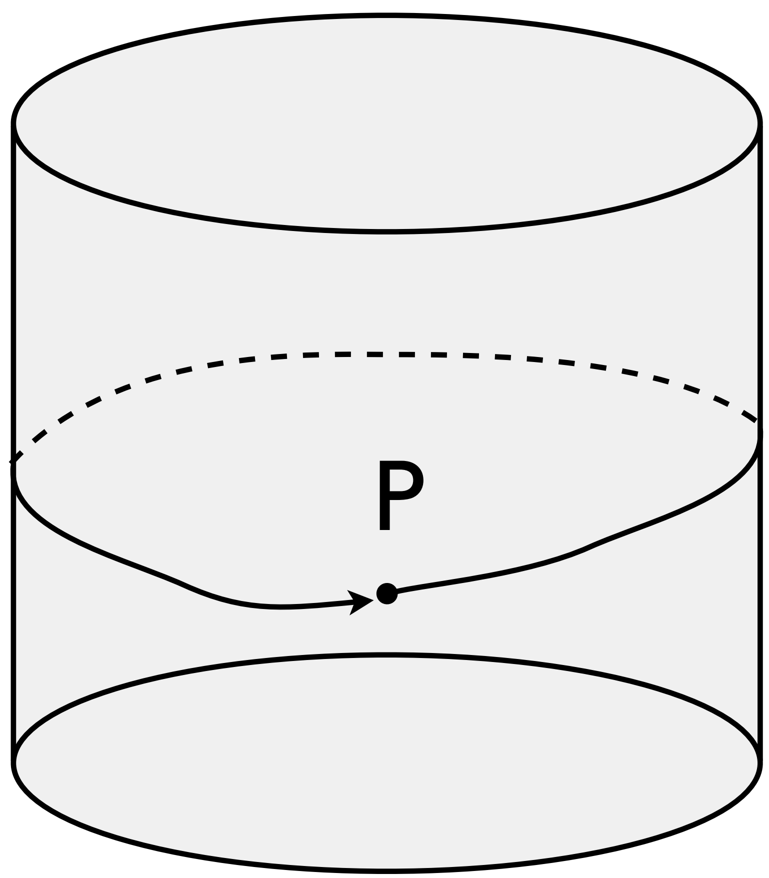
基本群とは（復習）

- 基本群とは，ある基点Aから出発してその基点に戻っているループの全体である．**ただし，ホモトープなループは同一のものとみなす．**



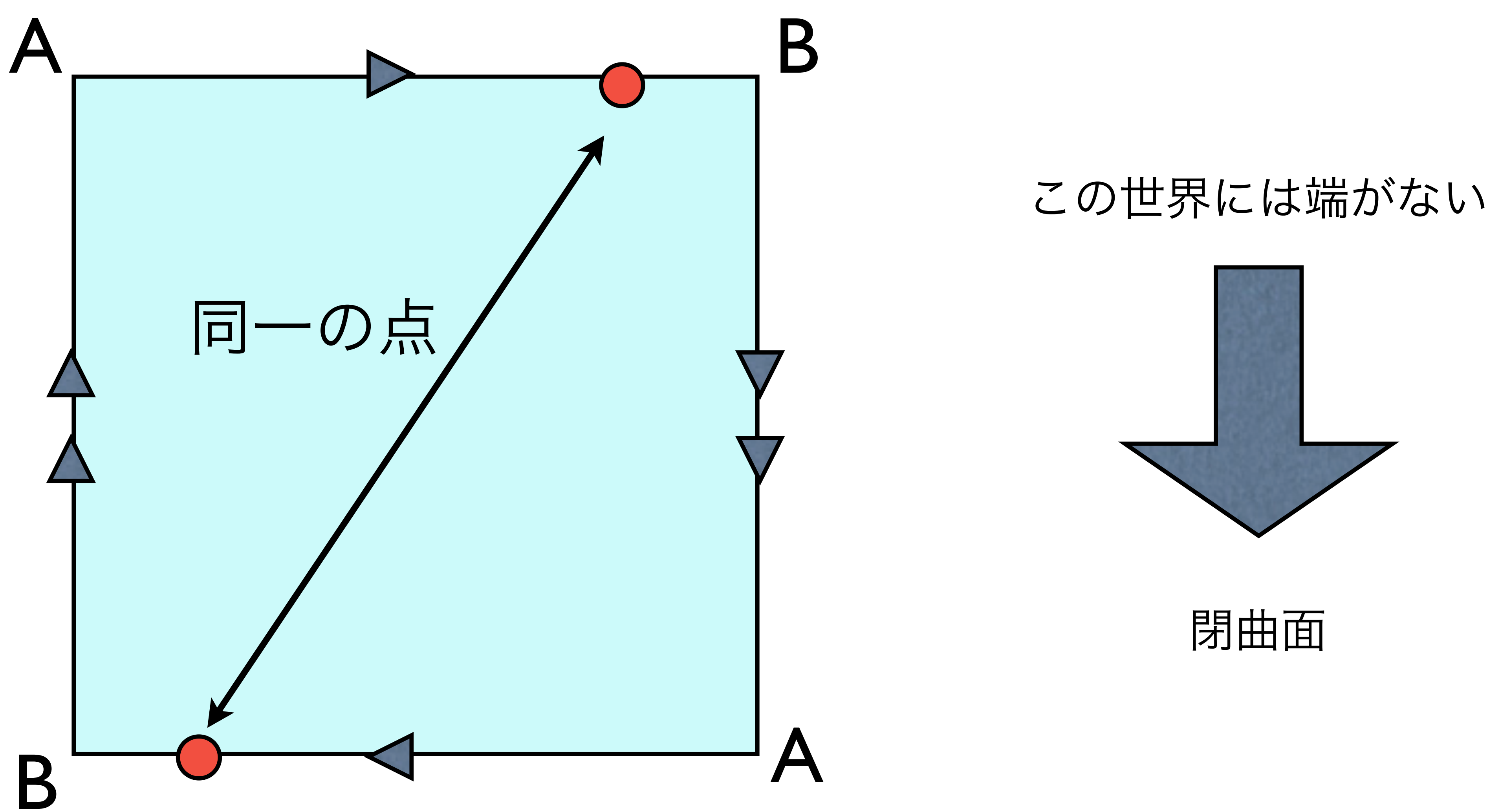
円柱の基本群

- 円柱（底面が除かれているもの）の基本群の要素は基点から出発して何周回ってもとに戻るかによって決定される.



射影平面の復習

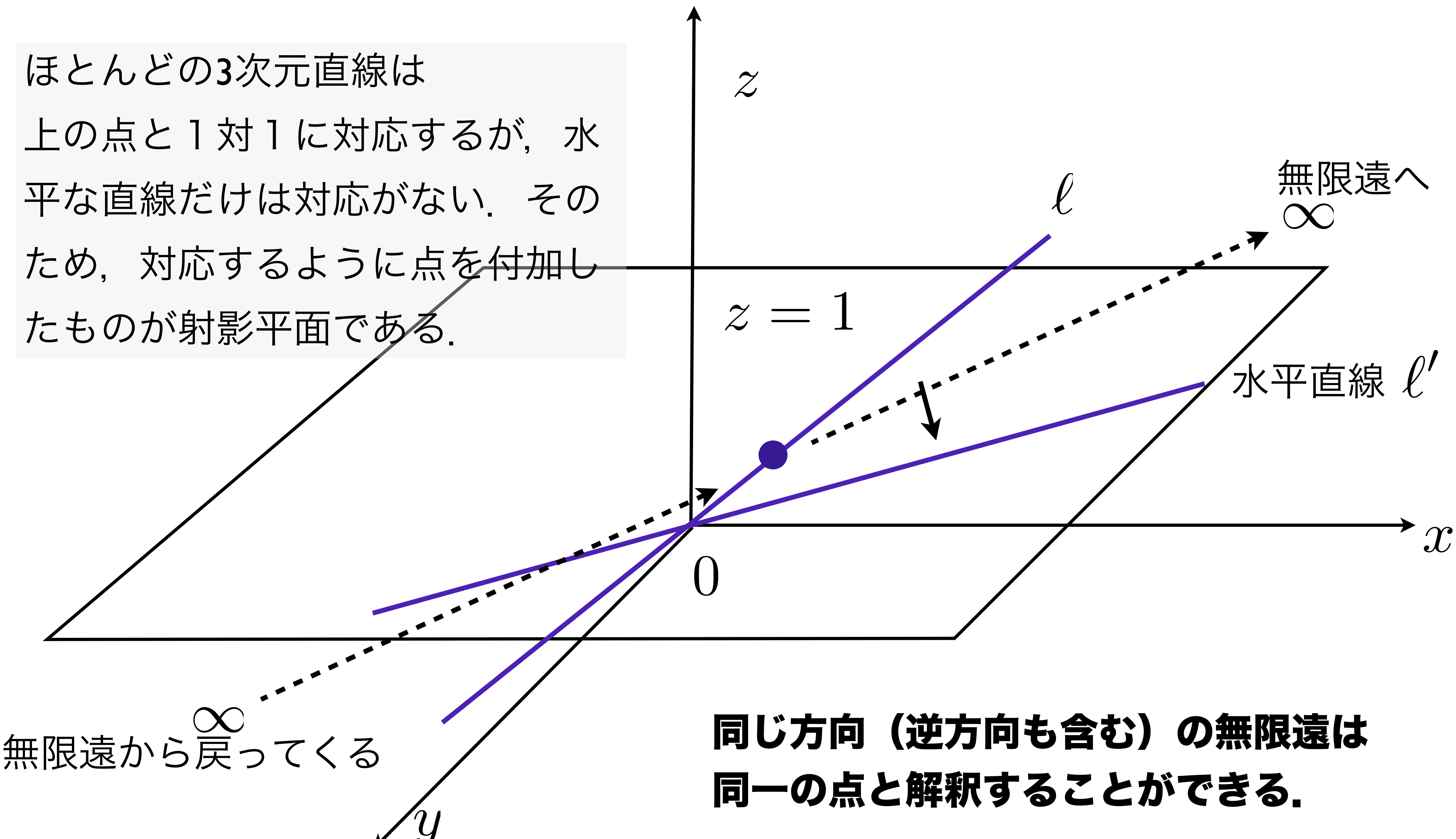
- 射影平面は展開図で書くと，４辺の相対する辺を逆向きに貼り合わせたもの.



射影平面のイメージ

原点を通る3次元直線と$z=1$の交点を考える

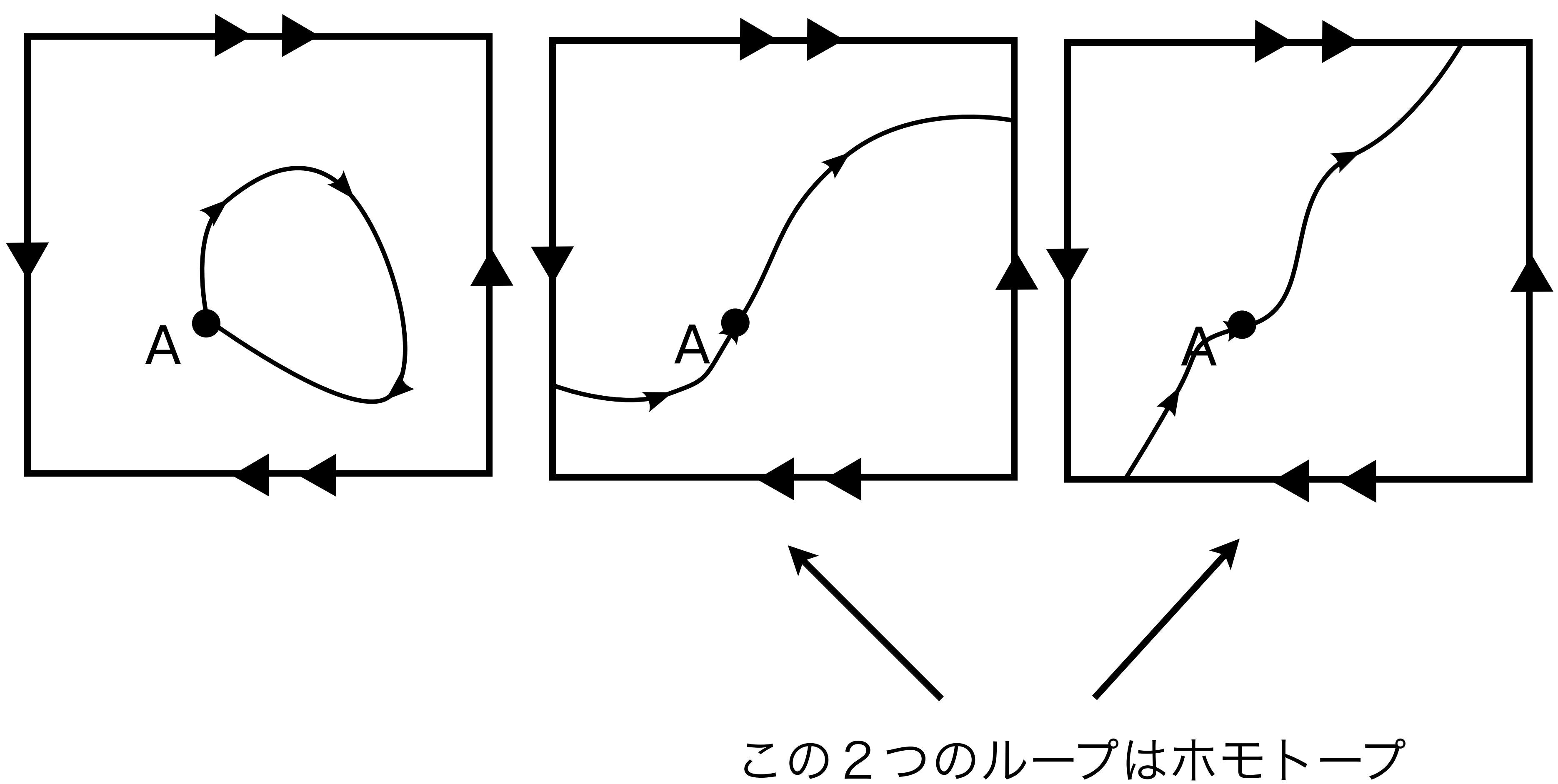
ほとんどの3次元直線は
上の点と１対１に対応するが，水平な直線だけは対応がない．そのため，対応するように点を付加したものが射影平面である．



同じ方向（逆方向も含む）の無限遠は同一の点と解釈することができる.

射影平面におけるループ

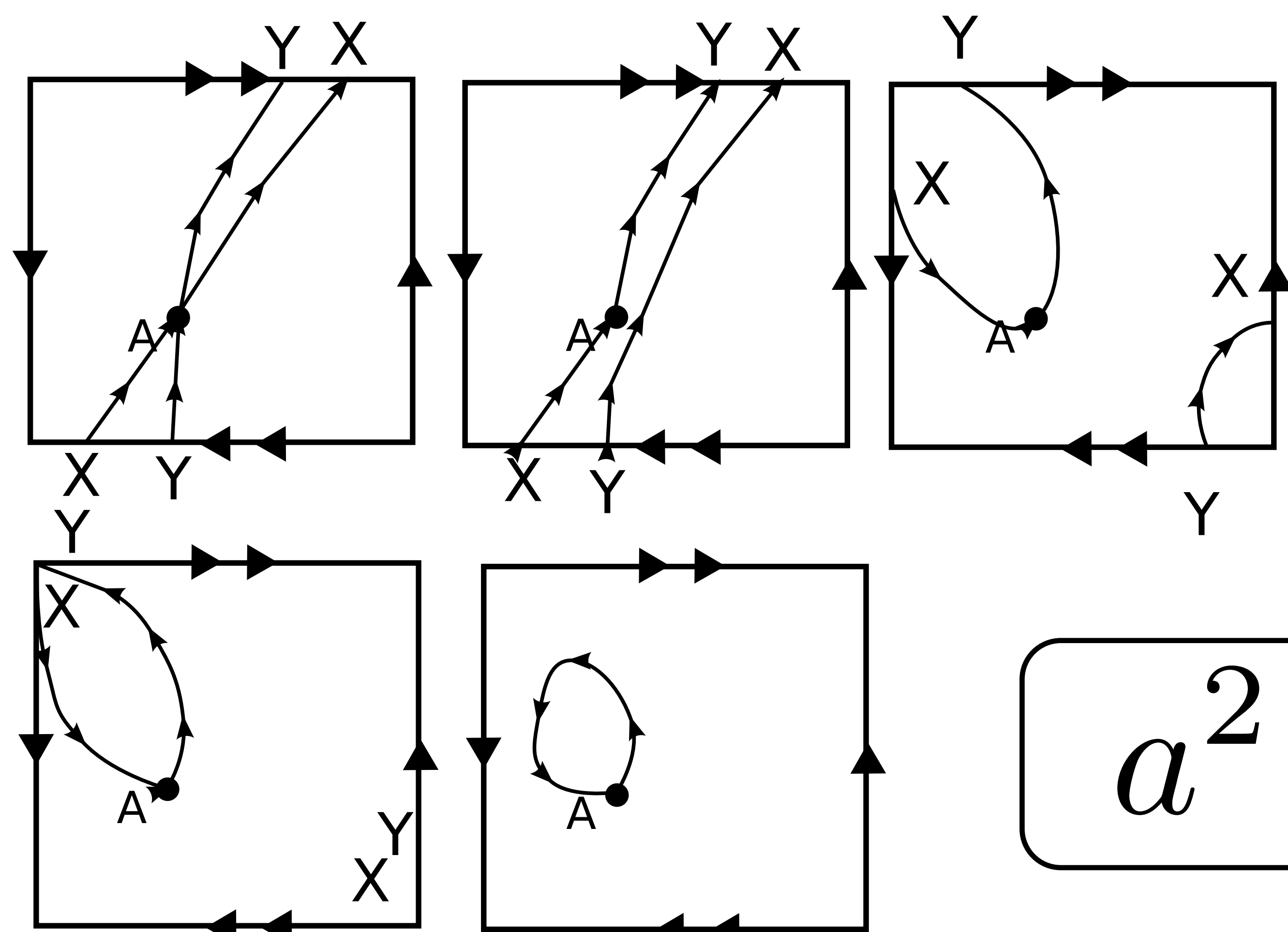
- 射影平面におけるループは２種類考えられる



このループをaとおく

a^2を計算してみる

- aにどのような性質があるか調べてみる．もし何もなければ，aを何回続けて回るかによって，基本群要素が決まり，整数と同形な群となるが…



$$a^2 = e$$

ここからの帰結

- 貼り合わせた部分を通るように2回続けて回ると, 局所的に回るのと同じになってしまう.

$$\boxed{a^2 = e}$$

$$a^{2n+1} = a$$
$$a^{2n} = e$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\pi_1(X) = \{e, a\} = \langle a | a^2 \rangle}$$