確 率 論　第５回
-- 条件付き確率 --

情報工学科　山本修身

条件付き確率とは

* **条件付き確率 (conditional probability)** は，ある事象が起こることを仮定したときの別の事象が起こる確率.
* A, B: 事象．Aが起こったと仮定したと，Bが起こる条件付き確率：

$$\boxed{P\{B|A\} = \frac{P\{A\cap B\}}{P\{A\}}}$$

条件付き確率の性質(1)

* 条件付き確率は常に0以上である.

$$P\{B|A\} \geq 0$$

* 定義よりほぼ明らか.

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A\cap B\}\ \boxed{\geq 0}}{P\{A\}\ \boxed{> 0}}$$

条件付き確率の性質(2)

* 標本空間全体の条件付き確率は1である.
* どのような条件をつけようが，全事象の確率は1である.

$$P\{\Omega|A\} = 1$$

* 証明は以下の単純な式による：

$$P\{\Omega|A\} = \frac{P\{\Omega\cap A\}}{P\{A\}} = \frac{P\{A\}}{P\{A\}} = 1$$

条件付き確率の性質(3)

* Biは互いに交わりを持たない事象であるとし，

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

とすると，$P\{B|A\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{B_i|A\}$

$$P\{B|A\} = \frac{P\{(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\cap A\}}{P\{A\}} = \frac{P\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i\cap A)\}}{P\{A\}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P\{B_i\cap A\}}{P\{A\}} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{B_i|A\}$$

条件付き確率は確率である

* 確率空間 (Ω, E, P)が与えられたとき，$P\{A\}>0$ なる事象Aを決めれば，これによって決定される３つ組 (Ω, E, $P\{\cdot|A\}$)は確率空間である.

条件付き確率の計算例

- 男女21人がおり，男女それぞれ眼鏡をかけている人がどれだけいるかが下の表に示されてる．
- 21人のうち適当に一人を選んだとき，男である確率は，P(M) = 12/21 = 4/7であるが，眼鏡をかけているという情報が入った場合にはP(M|G) = 5/6となる．

	眼鏡	眼鏡なし	計
男	5	7	12
女	1	8	9
計	6	15	21

乗法定理

- 乗法定理は条件付き確率の定義とほぼ同値である．結果は明らかであるが，非常に有用な定理である．
- P(A∩B) = P(A|B) P(B)
- P(A∩B) = P(B|A) P(A)

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup \neg A)) = P((B \cap A) \cup (B \cap \neg B))$$

教科書の例

- 2人がくじを引く．くじは10本中3本が当りくじである．
- 最初の人が当たる確率はP(A) = 3/10
- ２番目に引く人が当たる確率 P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|¬A)P(¬A) = 2/9 × 3/10 + 3/9 × 7/10 = 3/10
- **練習問題：**もし３番目の人が引く場合，当たる確率がやはり3/10であることを確認せよ．

練習問題

- 1〜9の数字が記入されたカードが大小それぞれ1枚ずつ計18枚あり，その中から無作為に大小１枚ずつ取り出す．今，大か小のどちらかを取り出してその数字が８であることがわかったとき，大小２枚のカード数字の和が16以上となる確率はいくらか．

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

練習問題の解答例

- 大小どちらかが8である場合の数は2 * 9 - 1 = 17 であり，そのうち，足して16以上になるのは，(8, 8), (8, 9), (9, 8)の3通りである．従って，求める条件付き確率は

$$\frac{3}{17}$$

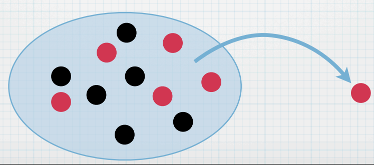
である．

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ポリアの壷の問題

- 壷の中に赤ボール(R)がr個，黒ボール(B)がb個入っている．
- 一つボールを壷から取り出し，RだったらRをc個，BだったらBをc個加えて壷に戻す．
- この操作をn回繰り返したとき，n回目の操作でRが取り出される確率を求めよ．



最初に赤が取り出される確率

* 最初に取り出すときはRがr個，Bがb個なので，確率は，

$$P\{R\} = \frac{r}{b+r}$$

2回目に赤が取り出される確率

* 1回目に黒を取り出して，2回目は赤を取り出す確率.

$$P\{BR|B\} = \frac{r}{r+b+c} \qquad P\{B\} = \frac{b}{r+b}$$

$$P\{BR\} = P\{BR|B\}P\{B\} = \frac{br}{(r+c+b)(r+b)}$$

* １回目に赤を取り出して，2回目も赤を取り出す確率.

$$P\{RR\} = \frac{(r+c)r}{(r+c+b)(r+b)}$$

2回目に赤が取り出される確率(つづき)

* ２つのケースは排反であるので，

$$P\{?R\} = P\{BR\} + P\{RR\} = \frac{r}{r+b}.$$

$$\frac{br}{(r+c+b)(r+b)} \qquad \frac{(r+c)r}{(r+c+b)(r+b)}$$

一般のケースについて

* n+1回目にRがでる確率は一般に

$$P\{?^n R\} = \frac{r}{r+b}$$

である．これを示せ（練習問題）．

全確率の定理

定理 3 (全確率の定理) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ について $\bigcup_{i=1}^n \{A_i\} = \Omega$ であるとする．任意の事象 B について

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}P\{B|A_i\}. \qquad (14)$$

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \cup_{i=1}^n A_i)$$
$$= P(\cup_{i=1}^n (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

ベイズの定理

定理 4 (ベイズの定理) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ について $\bigcup_{i=1}^n \{A_i\} = \Omega$ であるとする．このとき，

$$P\{A_k|B\} = \frac{P\{A_k\}P\{B|A_k\}}{\sum_{i=1}^n P\{A_i\}P\{B|A_i\}} \qquad (15)$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

乗法定理より

全確率の定理より

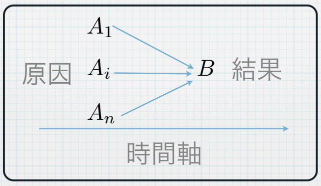
$$= \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

ベイズの定理の解釈

定理 4 (ベイズの定理) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ について $\bigcup_{i=1}^{n}\{A_i\} = \Omega$ であるとする．このとき，

$$P\{A_k|B\} = \frac{P\{A_k\}P\{B|A_k\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}P\{B|A_i\}} \tag{15}$$

事後確率　　事前確率



練習問題

* ある工場では３台の機械A, B, Cを用いてある部品を生産している．それぞれの機械で生産する部品の割合は 2:3:5 である．また，それぞれの機械で不良品が発生する確率は4%, 3%, 2%である．
* いま，ある不良品が見つかった．この不良品がそれぞれの機械で生産された確率を求めよ．

練習問題の解答例

* ベイズの定理において，A_1, A_2, A_3がそれぞれの機械で生産されたという事象，Bは不良品が発生するという事象であるとする．
* ここでは，$P(A_i \mid B)$ を計算すれば良い．

$$P(A_1|B) = \frac{2\times 4}{2\times 4 + 3\times 3 + 5\times 2} = \frac{8}{27}$$

$$P(A_2|B) = \frac{3\times 3}{2\times 4 + 3\times 3 + 5\times 2} = \frac{9}{27}$$

$$P(A_3|B) = \frac{5\times 2}{2\times 4 + 3\times 3 + 5\times 2} = \frac{10}{27}$$

事象の独立性

* ２つの事象A, Bが独立であるとは，直感的には「関係ない」ということであるが，確率論としては，厳密に数学的な概念である．A, Bが独立であるとは，

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

ということである．

独立性と条件付き確率

* A, Bが独立ならば，P(A) = P(A|B) であり，P(B) = P(B | A)である．

$$P(A) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A|B)$$

独立性の例

* トランプ（52枚）において「スペードが出る」という事象(=A)と「1のカードが出る」という事象(=B) は独立である．
* なぜならば，

$$P(A\cap B) = \frac{1}{52},\quad P(A) = \frac{1}{4},\quad P(B) = \frac{1}{13}$$

であるからである．

補集合の独立性

- 事象A, Bが独立であれば，その余事象A^c, B^cも独立である．

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

練習問題

- トランプで１枚カードを取り出すとき，「絵札がでる」という事象 (R)と「偶数の札がでる」という事象 (E) は独立か？

練習問題の解説

- トランプで１枚も札を取り出すとき，「絵札がでる」という事象 (R)と「偶数の札がでる」という事象 (E) は独立か？

$$P(R) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(E) = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$$

$$P(R \cap E) = \frac{4}{52}$$

$$\frac{3}{13}\frac{6}{13} = \frac{18}{169} \neq \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(R \cap E) \neq P(R)P(E)$$

練習問題

- トランプで１枚も札を取り出すとき，「絵札がでる」という事象 (R)と「偶数の札がでる」という事象 (E) として， P(R | E)とP(E | R)を計算せよ．

練習問題の解答例

- トランプで１枚も札を取り出すとき，「絵札がでる」という事象 (R)と「偶数の札がでる」という事象 (E) として， P(R | E)とP(E | R)を計算せよ．

$$P(R|E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{4}{52}\frac{13}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(E|R) = \frac{P(R \cap E)}{P(R)} = \frac{4}{52}\frac{13}{3} = \frac{1}{3}$$

今回のまとめ

- **条件付き確率：**ある事象が成り立つと仮定したときの確率を条件付き確率と呼ぶ．
- **ベイズの定理：**ベイズの定理によって，事後確率を計算することができる．
- **事象の独立性：**２つの事象が独立であるということは，意味的には２つの事象がお互いに関係ないということである．